# CAML

## 9 - Diviser pour régner

http://tsi.tuxfamily.org/OCaml


16 mai 2023

# 1 Recherche des zéros d'une fonction

- par balayage

1. Recherche des zéros d'une fonction
   - par balayage
   - par dichotomie

# DIVISER POUR REGNER

Divide ut imperes

Ce terme désigne une technique de programmation qui consiste à :

- **Diviser** : on découpe le problème initial en sous-problèmes
- **Régner** : on résout les problèmes simples.
- **Combiner** : on trouve une solution au problème initial à partir des solutions des sous-problèmes.

Remarque : on utilise aussi parfois ce terme lorsque l'on découpe une fonction complexe en plusieurs fonctions plus simples pour résoudre un problème.

On considère une fonction $f$ continue et strictement monotone sur $[a; b]$ et changeant de signe sur cet intervalle.

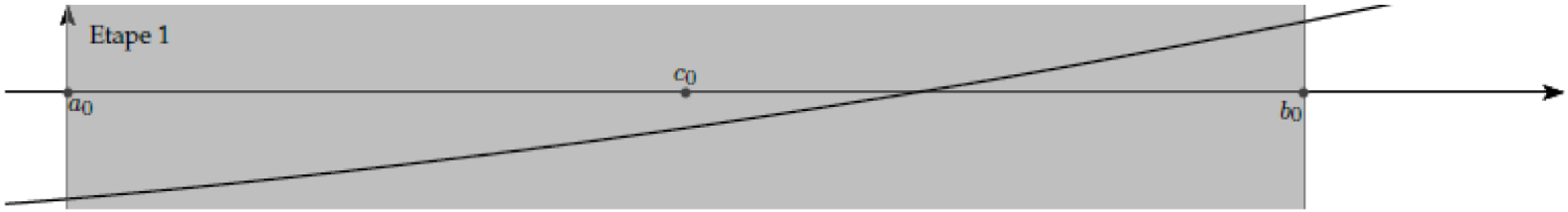
## Exercice

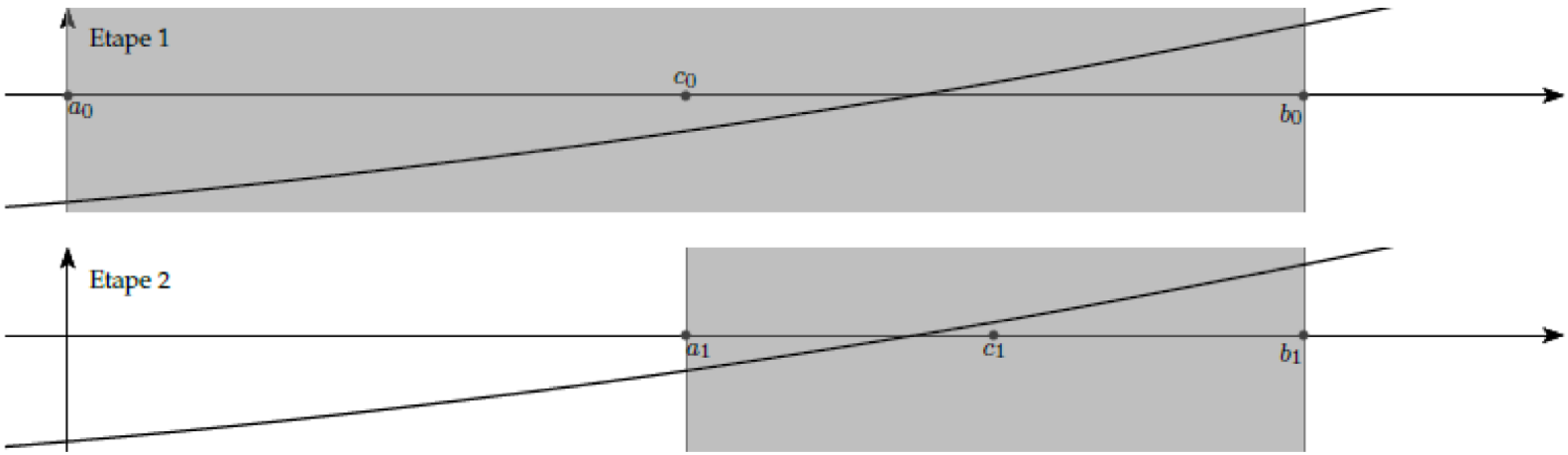
1. Combien d'itérations faut-il réaliser au pire pour obtenir un encadrement d'amplitude $\varepsilon$ à partir d'un intervalle $[a, b]$ ?
2. On note $B_n$ le nombre d'itérations pour donner une précision de $10^{-n}$. Quel est le lien entre $B_n$ et $B_{n+1}$ ?

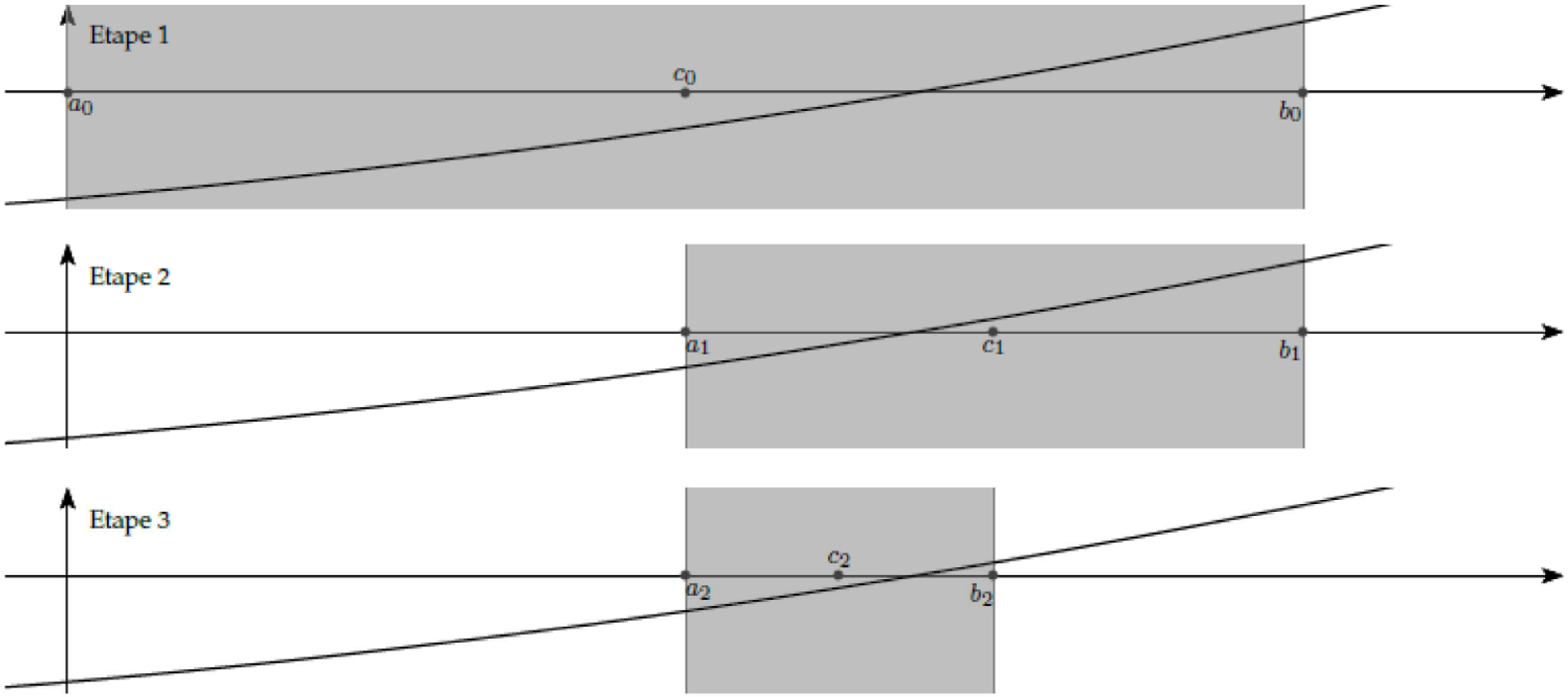
## Exercice

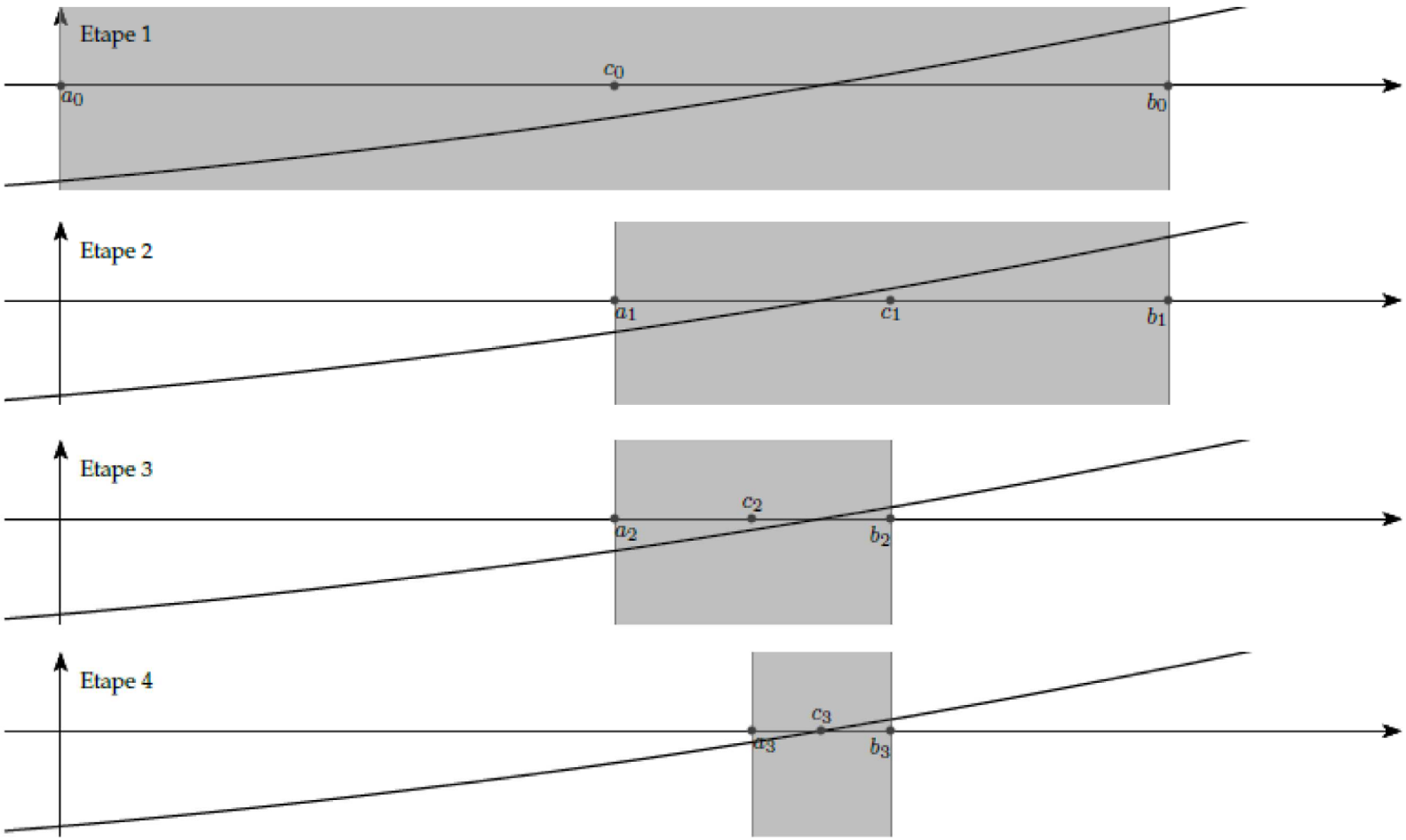
1. Combien d'itérations faut-il réaliser au pire pour obtenir un encadrement d'amplitude $\varepsilon$ à partir d'un intervalle $[a, b]$ ?
2. On note $B_n$ le nombre d'itérations pour donner une précision de $10^{-n}$. Quel est le lien entre $B_n$ et $B_{n+1}$ ?

1. $a + n\varepsilon > b \iff n > \dfrac{b-a}{\varepsilon}$
2. $B_{n+1} \approx 10 B_n$


Etape 1
$a_0$
$c_0$
$b_0$


Etape 1
$a_0$
$c_0$
$b_0$
Etape 2
$a_1$
$c_1$
$b_1$


Etape 1
$a_0$
$c_0$
$b_0$
Etape 2
$a_1$
$c_1$
$b_1$
Etape 3
$a_2$
$c_2$
$b_2$


Etape 1
$a_0$
$c_0$
$b_0$
Etape 2
$a_1$
$c_1$
$b_1$
Etape 3
$a_2$
$c_2$
$b_2$
Etape 4
$a_3$
$c_3$
$b_3$

## Exercice

1. Combien d'itérations faut-il réaliser pour obtenir un encadrement d'amplitude $\varepsilon$ à partir d'un intervalle $[a, b]$ ?
2. On note $T_n$ le nombre d'itérations pour donner une précision de $10^{-n}$. Quel est le lien entre $T_n$ et $T_{n+1}$ ?

Question 1 : à chaque itération, l'amplitude de l'encadrement est divisée par 2, donc à la fin de la $n^{\text{ème}}$ itération, on a une amplitude de $A_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

Question 1 : à chaque itération, l'amplitude de l'encadrement est divisée par 2, donc à la fin de la $n^{\text{ème}}$ itération, on a une amplitude de $A_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Ainsi :

$$A_n < \varepsilon \iff \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$$

Question 1 : à chaque itération, l'amplitude de l'encadrement est divisée par 2, donc à la fin de la $n^{\text{ème}}$ itération, on a une amplitude de $A_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} A_n < \varepsilon &\iff \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \\ &\iff \frac{b-a}{\varepsilon} < 2^n \end{aligned}$$

Question 1 : à chaque itération, l'amplitude de l'encadrement est divisée par 2, donc à la fin de la $n^{\text{ème}}$ itération, on a une amplitude de $A_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} A_n < \varepsilon &\iff \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \\ &\iff \frac{b-a}{\varepsilon} < 2^n \\ &\iff 2^n > \frac{b-a}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Question 1 : à chaque itération, l'amplitude de l'encadrement est divisée par 2, donc à la fin de la $n^{\text{ème}}$ itération, on a une amplitude de $A_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} A_n < \varepsilon &\iff \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \\ &\iff \frac{b-a}{\varepsilon} < 2^n \\ &\iff 2^n > \frac{b-a}{\varepsilon} \\ &\iff n \ln 2 > \ln(b-a) - \ln \varepsilon \end{aligned}$$

Question 1 : à chaque itération, l'amplitude de l'encadrement est divisée par 2, donc à la fin de la $n^{\text{ème}}$ itération, on a une amplitude de $A_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
A_n < \varepsilon &\iff \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \\
&\iff \frac{b-a}{\varepsilon} < 2^n \\
&\iff 2^n > \frac{b-a}{\varepsilon} \\
&\iff n \ln 2 > \ln(b-a) - \ln \varepsilon \\
&\iff n > \frac{\ln(b-a)}{\ln 2} - \frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}
\end{aligned}$$

Question 1 : à chaque itération, l'amplitude de l'encadrement est divisée par 2, donc à la fin de la $n^{\text{ème}}$ itération, on a une amplitude de $A_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
A_n < \varepsilon &\iff \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \\
&\iff \frac{b-a}{\varepsilon} < 2^n \\
&\iff 2^n > \frac{b-a}{\varepsilon} \\
&\iff n \ln 2 > \ln(b-a) - \ln \varepsilon \\
&\iff n > \frac{\ln(b-a)}{\ln 2} - \frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}
\end{aligned}$$

Question 1 : à chaque itération, l'amplitude de l'encadrement est divisée par 2, donc à la fin de la $n^{\text{ème}}$ itération, on a une amplitude de $A_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
A_n < \varepsilon &\iff \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \\
&\iff \frac{b-a}{\varepsilon} < 2^n \\
&\iff 2^n > \frac{b-a}{\varepsilon} \\
&\iff n \ln 2 > \ln(b-a) - \ln \varepsilon \\
&\iff n > \frac{\ln(b-a)}{\ln 2} - \frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \\
&\iff n > \alpha \ln\left(1/\varepsilon\right) + \beta
\end{aligned}$$

Question 2 : Ainsi la première valeur de $n$ telle que $A_{n+1} < \varepsilon$ est

$$T_{n+1}$$

Question 2 : Ainsi la première valeur de $n$ telle que $A_{n+1} < \varepsilon$ est

$$T_{n+1} = \lceil \alpha \ln \left(10^{n+1}\right) + \beta \rceil$$

Question 2 : Ainsi la première valeur de $n$ telle que $A_{n+1} < \varepsilon$ est

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \lceil \alpha \ln \left(10^{n+1}\right) + \beta \rceil \\ &= \lceil \alpha \ln \left(10^{n}\right) + \alpha \ln 10 + \beta \rceil \end{aligned}$$

Question 2 : Ainsi la première valeur de $n$ telle que $A_{n+1} < \varepsilon$ est

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \lceil \alpha \ln \left(10^{n+1}\right) + \beta \rceil \\ &= \lceil \alpha \ln \left(10^{n}\right) + \alpha \ln 10 + \beta \rceil \\ &\approx T_n + \underbrace{\alpha \ln 10 + \beta}_{\text{constante}} \end{aligned}$$

Exemple de code en OCaml :

```
let rec dicho f a b eps =
    if b -. a < eps
    then a
    else let c = (b +.a) /. 2. in
        if f(a) *. f(c) < 0.
        then dicho f a c eps
        else dicho f c b eps
;;
```

- Par balayage : $B_{n+1} = 10B_n$
- Par dichotomie : $T_{n+1} = T_n + Constante$

## Exercice

1. Ecrire une fonction récursive naïve qui donne $a^n$ pour deux entiers naturels $a$ et $n$ non simultanément nuls.
2. Quelle est sa complexité ?

Version récursive :

```
let rec puiss a = function
    |0 -> 1
    |n -> a * puiss a (n-1)
;;
```

Version récursive :

```
let rec puiss a = function
    |0 -> 1
    |n -> a * puiss a (n-1)
;;
```

Version récursive terminale :

```
let puiss a n =
    let rec puissR r a = function
        |0 -> r
        |n -> puissR (a*r)  a (n-1)
    in puissR 1 a n
;;
```

Dans les 2 cas, la complexité est $O(n)$

Quelques remarques sur la notation O :

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites strictement positives,

## Vocabulaire

- On dit que $u_n = O(v_n)$ si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.

Quelques remarques sur la notation O :

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites strictement positives,

## Vocabulaire

- On dit que $u_n = O(v_n)$ si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. Dit autrement
- On dit que $u_n = O(v_n)$ si $\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M v_n$

Quelques remarques sur la notation O :

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites strictement positives,

**Vocabulaire**

- On dit que $u_n = O(v_n)$ si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. Dit autrement
- On dit que $u_n = O(v_n)$ si $\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M v_n$

Avec cette notation, $u_n = O(n) \Longrightarrow u_n = O(n^2)$

Quelques remarques sur la notation O :

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites strictement positives,

**Vocabulaire**

- On dit que $u_n = O(v_n)$ si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. Dit autrement
- On dit que $u_n = O(v_n)$ si $\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M v_n$

Avec cette notation, $u_n = O(n) \Longrightarrow u_n = O(n^2) \Longrightarrow u_n = O(2^n)$

Quelques remarques sur la notation O :

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites strictement positives,

**Vocabulaire**

- On dit que $u_n = O(v_n)$ si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. Dit autrement
- On dit que $u_n = O(v_n)$ si $\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M v_n$

Avec cette notation, $u_n = O(n) \Longrightarrow u_n = O(n^2) \Longrightarrow u_n = O(2^n)$ ce qui est gênant, car ce n'est pas ce que l'on sous-entend en disant précédemment que la complexité est en $O(n)$.

Nouvelle notation $\theta$ ($\ll$ de l'ordre de $\gg$ ).

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites strictement positives,

**Vocabulaire**

- On dit que $u_n = \theta(v_n)$ si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

Nouvelle notation $\theta$ ($\ll$ de l'ordre de $\gg$ ).

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites strictement positives,

**Vocabulaire**

- On dit que $u_n = \theta(v_n)$ si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.
- $u_n = \theta(v_n)$ si $\exists M_1, M_2 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ M_1 v_n \leqslant u_n \leqslant M_2 v_n$

Nouvelle notation $\theta$ ($\ll$ de l'ordre de $\gg$ ).

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites strictement positives,

**Vocabulaire**

- On dit que $u_n = \theta(v_n)$ si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.
- $u_n = \theta(v_n)$ si $\exists M_1, M_2 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ M_1 v_n \leqslant u_n \leqslant M_2 v_n$

Par exemple $4n(n-3)\log_2(n+2) = \theta(n^2 \ln n)$.

L'algorithme d'**exponentiation rapide** est basé sur le principe suivant :

$$a^n = \begin{cases} \left(a^{\frac{n}{2}}\right)^2 & \text{si } n \text{ pair} \\ a \times \left(a^{\frac{n-1}{2}}\right)^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'algorithme d'**exponentiation rapide** est basé sur le principe suivant :

$$a^n = \begin{cases} \left(a^{\frac{n}{2}}\right)^2 & \text{si } n \text{ pair} \\ a \times \left(a^{\frac{n-1}{2}}\right)^2 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \left(a^2\right)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ a \times \left(a^2\right)^{\frac{n-1}{2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

## Exercice

Écrire une fonction récursive appliquant cet algorithme.

## Exercice

Écrire une fonction récursive appliquant cet algorithme.

Une solution récursive :

```
let rec puiss a = function
  |0 -> 1
  |n when n mod 2 == 0 ->
                      let x = puiss a (n/2) in x*x
  |n -> let x = puiss a (n/2) in a*x*x
;;
```

## Exercice

Écrire une fonction récursive appliquant cet algorithme.

Une solution récursive plus simple :

```
let rec puiss a = function
    |0 -> 1
    |n when n mod 2 == 0 -> puiss (a*a) (n/2)
    |n -> a * puiss (a*a) (n/2)
;;
```

## Exercice

Écrire une fonction récursive **terminale** appliquant cet algorithme.

## Exercice

Écrire une fonction récursive **terminale** appliquant cet algorithme.

Une solution récursive :

```
let puiss a n =
 let rec puissR res a = function
  |0 -> res
  |n when n mod 2 == 0 -> puissR res (a*a) (n/2)
  |n -> puissR (res*a) (a*a) (n/2)
 in puissR 1 a n
;;
```

## Exercice

On note $B_n$ le nombre de multiplications à effectuer pour calculer $a^n$ avec cet algorithme et $A_n$ pour l'algorithme naïf.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \log_2(n+1) \leqslant B_n \leqslant 2\log_2(n+1)$.
2. Conclure.

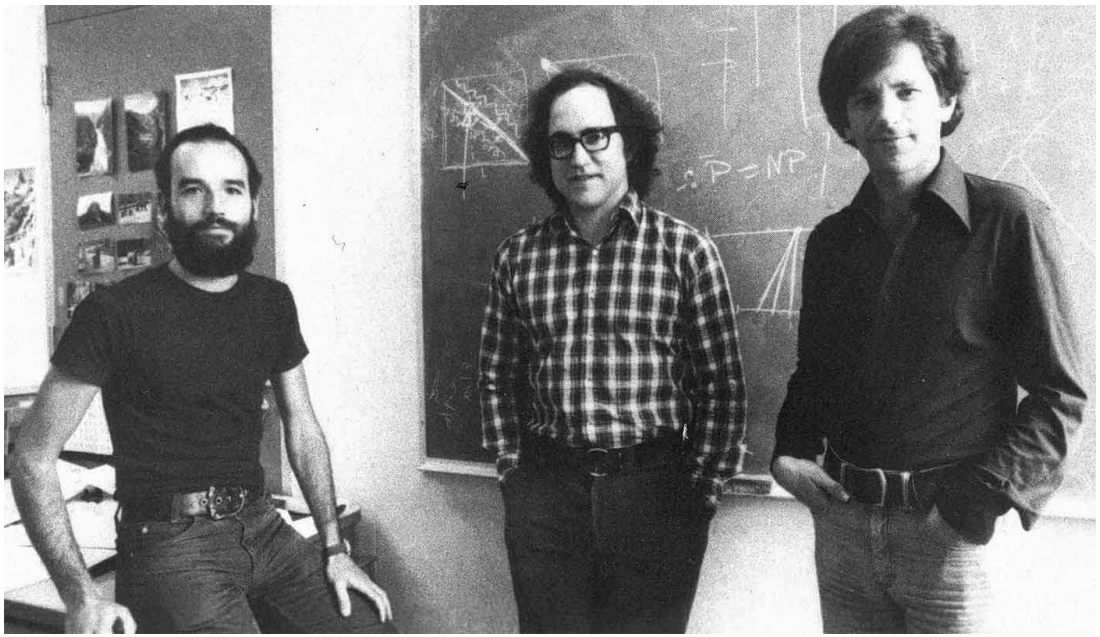
## Exercice

On note $B_n$ le nombre de multiplications à effectuer pour calculer $a^n$ avec cet algorithme et $A_n$ pour l'algorithme naïf.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \log_2(n+1) \leqslant B_n \leqslant 2\log_2(n+1)$.
2. Conclure.

$B_n = \theta(\ln n)$ alors que $A_n = \theta(n)$, c'est beaucoup mieux !

- Le chiffrement RSA est un algorithme de cryptographie **asymétrique** encore très utilisé et décrit dans les années 70.




Adi **S**hamir, Ronald **R**ivest et Leonard **A**dleman

Par tradition, on appelle **Alice** 

la personne qui désire recevoir un message chiffré, et **Bob** 

la personne qui envoie le message.

Par tradition, on appelle **Alice** 

la personne qui désire recevoir un message chiffré, et **Bob** 

la personne qui envoie le message.

- Alice choisit deux grands entiers naturels premiers $p$ et $q$ et fait leur produit $n = pq$.

Par tradition, on appelle **Alice** 

la personne qui désire recevoir un message chiffré, et **Bob** 

la personne qui envoie le message.

- Alice choisit deux grands entiers naturels premiers $p$ et $q$ et fait leur produit $n = pq$.
- Elle choisit un entier $c$ premier avec $(p-1)(q-1)$.

Par tradition, on appelle **Alice** 

la personne qui désire recevoir un message chiffré, et **Bob** 

la personne qui envoie le message.

- Alice choisit deux grands entiers naturels premiers $p$ et $q$ et fait leur produit $n = pq$.
- Elle choisit un entier $c$ premier avec $(p-1)(q-1)$.
- Elle publie dans un annuaire sa clef publique : $(n, c)$.

Par tradition, on appelle **Alice** 

la personne qui désire recevoir un message chiffré, et **Bob** 

la personne qui envoie le message.

- Alice choisit deux grands entiers naturels premiers $p$ et $q$ et fait leur produit $n = pq$.
- Elle choisit un entier $c$ premier avec $(p-1)(q-1)$.
- Elle publie dans un annuaire sa clef publique : $(n, c)$.
- Elle calcule à partir de $p$ et $q$, qu'elle a gardés secrets, la clef $d$ de déchiffrage (c'est sa clef privée). Celle-ci doit satisfaire l'équation $cd \equiv 1\ [(p-1)(q-1)]$

Par tradition, on appelle **Alice** 

la personne qui désire recevoir un message chiffré, et **Bob** 

la personne qui envoie le message.

- Alice choisit deux grands entiers naturels premiers $p$ et $q$ et fait leur produit $n = pq$.
- Elle choisit un entier $c$ premier avec $(p-1)(q-1)$.
- Elle publie dans un annuaire sa clef publique : $(n, c)$.
- Elle calcule à partir de $p$ et $q$, qu'elle a gardés secrets, la clef $d$ de déchiffrage (c'est sa clef privée). Celle-ci doit satisfaire l'équation $cd \equiv 1\ [(p-1)(q-1)]$ (Euclide)

Ensuite $p$ et $q$ sont oubliés (c'est sur ce fait que repose la sécurité).

- Si Bob veut envoyer le message (nombre) $m$ à Alice, il calcule

$$m' \equiv m^c [n]$$

Ensuite $p$ et $q$ sont oubliés (c'est sur ce fait que repose la sécurité).

- Si Bob veut envoyer le message (nombre) $m$ à Alice, il calcule

$$m' \equiv m^c [n]$$

- Alice reçoit alors $m'$ qu'elle convertit en

$$m'' \equiv m'^d [n]$$

Ensuite $p$ et $q$ sont oubliés (c'est sur ce fait que repose la sécurité).

- Si Bob veut envoyer le message (nombre) $m$ à Alice, il calcule

$$m' \equiv m^c [n]$$

- Alice reçoit alors $m'$ qu'elle convertit en

$$m'' \equiv m'^d [n]$$

**Propriété mathématique :**

On montre que $m \equiv m''[n]$ c'est à dire $m \equiv m^{c \times d}[n]$

| message initial | | message codé | | message décodé |
|---|---|---|---|---|
| $m$ | $\longrightarrow$ | $m^c$ | $\longrightarrow$ | $m^{cd} \equiv m$ |


| message initial | | message codé | | message décodé |
|---|---|---|---|---|
| $m$ | $\longrightarrow$ | $m^c$ | $\longrightarrow$ | $m^{cd} \equiv m$ |



D'où le terme de **chiffrement asymétrique**
la clé de chiffrement n'est pas celle de déchiffrement.

Un exemple pour comprendre :
Création des clés :

- $p = 17$ et $q = 13$

Un exemple pour comprendre :
Création des clés :

- $p = 17$ et $q = 13$
- $N = 17 \times 13 = 221$ (on peut coder 221 nombres de 0 à 220).

Un exemple pour comprendre :
Création des clés :

- $p = 17$ et $q = 13$
- $N = 17 \times 13 = 221$ (on peut coder 221 nombres de 0 à 220).
- $(p-1)(q-1) = 16 \times 12 = 192 = 2^6 \times 3$

Un exemple pour comprendre :
Création des clés :

- $p = 17$ et $q = 13$
- $N = 17 \times 13 = 221$ (on peut coder 221 nombres de 0 à 220).
- $(p-1)(q-1) = 16 \times 12 = 192 = 2^6 \times 3$
- Si on choisit $c = 5 \times 7 = 35$ qui est premier avec 192

Un exemple pour comprendre :
Création des clés :

- $p = 17$ et $q = 13$
- $N = 17 \times 13 = 221$ (on peut coder 221 nombres de 0 à 220).
- $(p-1)(q-1) = 16 \times 12 = 192 = 2^6 \times 3$
- Si on choisit $c = 5 \times 7 = 35$ qui est premier avec 192
- Cherchons $d$ tel que $cd \equiv 1[192]$...$d = 11$ convient.

Alice donne sa clé publique $(n, c) = (221, 35)$ et conserve secrètement sa clé privée : $d = 11$. Bob veut envoyer le message $m = 18$.

- $18^2 = 324 \equiv 103[221]$,

Alice donne sa clé publique $(n, c) = (221, 35)$ et conserve secrètement sa clé privée : $d = 11$. Bob veut envoyer le message $m = 18$.

- $18^2 = 324 \equiv 103[221]$, et $18^4 \equiv 103^2 \equiv 10609 \equiv 1[221]$.

Alice donne sa clé publique $(n, c) = (221, 35)$ et conserve secrètement sa clé privée : $d = 11$. Bob veut envoyer le message $m = 18$.

- $18^2 = 324 \equiv 103[221]$, et $18^4 \equiv 103^2 \equiv 10609 \equiv 1[221]$.
- Ainsi $m' = 18^{35} \equiv 18^{4\times 8+3} \equiv 18^3 \equiv 86[221]$

Alice donne sa clé publique $(n, c) = (221, 35)$ et conserve secrètement sa clé privée : $d = 11$. Bob veut envoyer le message $m = 18$.

- $18^2 = 324 \equiv 103[221]$, et $18^4 \equiv 103^2 \equiv 10609 \equiv 1[221]$.
- Ainsi $m' = 18^{35} \equiv 18^{4\times 8+3} \equiv 18^3 \equiv 86[221]$

Alice reçoit $m' = 86$ qu'elle décode :

- $86^2 \equiv 103[221]$; $86^3 \equiv 18[221]$; $86^4 \equiv 1[221]$.

Alice donne sa clé publique $(n, c) = (221, 35)$ et conserve secrètement sa clé privée : $d = 11$. Bob veut envoyer le message $m = 18$.

- $18^2 = 324 \equiv 103[221]$, et $18^4 \equiv 103^2 \equiv 10609 \equiv 1[221]$.
- Ainsi $m' = 18^{35} \equiv 18^{4\times 8+3} \equiv 18^3 \equiv 86[221]$

Alice reçoit $m' = 86$ qu'elle décode :

- $86^2 \equiv 103[221]$; $86^3 \equiv 18[221]$; $86^4 \equiv 1[221]$.
- Ainsi $m'' = 86^{11} = 86^{4\times 2+3} \equiv 86^3 \equiv 18[221]$

Côté programmation, c'est très simple a priori :

- Codage du message :

```
let encode m c n = (puiss m c) mod n;;
```

Côté programmation, c'est très simple a priori :

- Codage du message :

```
let encode m c n = (puiss m c) mod n;;
```

- Décodage du message :

```
let decode = encode
```

Côté programmation, c'est très simple a priori :

- Codage du message :

```
let encode m c n = (puiss m c) mod n;;
```

- Décodage du message :

```
let decode = encode
```

Mais ça ne fonctionne pas....

```
let m1 = encode 18 35 221;;
val m1 : int = -138
```

## Exercice

Écrire une fonction qui calcule $a^n[m]$ en donnant pour réponse le représentant dans $\{0, ..., m-1\}$.

## Exercice

Écrire une fonction qui calcule $a^n[m]$ en donnant pour réponse le représentant dans $\{0, ..., m-1\}$.

```
let puissM a n m =
  let rec puissR res a = function
    |0 -> res
    |n when n mod 2 == 0 ->
                    puissR res (a*a mod m) (n/2)
    |n -> puissR (res*a mod m) (a*a mod m) (n/2)
  in puissR 1 a n
;;
let encode = puissM;;
let decode = encode
```

Encore plus fort, Alice et Bob peuvent **authentifier** leurs échanges

| | clé publique | clé privée | fonction de codage |
|---|---|---|---|
|  | $(n_A; c_A)$ | $d_A$ | $f$ |
|  | $(n_B; c_B)$ | $d_B$ | $g$ |

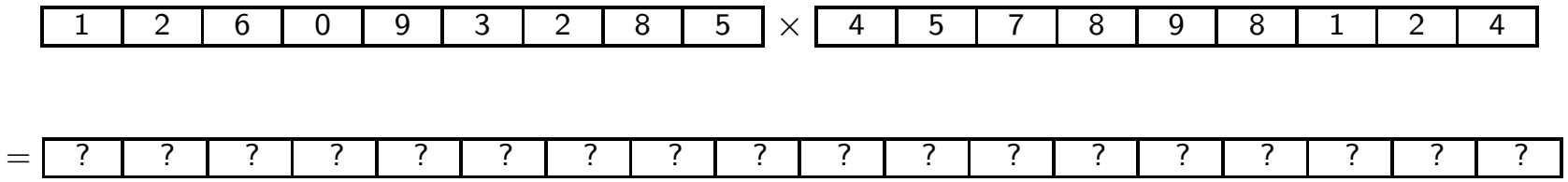
Encore plus fort, Alice et Bob peuvent **authentifier** leurs échanges

| | clé publique | clé privée | fonction de codage |
|---|---|---|---|
|  | $(n_A; c_A)$ | $d_A$ | $f$ |
|  | $(n_B; c_B)$ | $d_B$ | $g$ |

Si $n_B < n_A$, on choisit $m \in \{0, ..., n_B - 1\}$ :

| message initial | | message signé | | message codé | | message "décodé" | | message authentifié |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | $\overset{g^{-1}}{\longmapsto}$  | $m_s$ | $\overset{f}{\longmapsto}$  | | $\overset{f^{-1}}{\longmapsto}$  | $m_s$ | $\overset{g}{\longmapsto}$  | $m$ |

On cherche à multiplier deux grands entiers naturels :




Où les nombres sont représentés par des tableaux
ou des listes de chiffres

On cherche à multiplier deux grands entiers naturels :

- En base 10,

  tout entier s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{N} a_k 10^k$ où $a_k \in \{0, ..., 9\}$

On cherche à multiplier deux grands entiers naturels :

- En base 10,

  tout entier s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{N} a_k 10^k$ où $a_k \in \{0, ..., 9\}$

- En base 2,

  tout entier s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{N} a_k 2^k$ où $a_k \in \{0, 1\}$

Notre objectif se traduit par :

$$N_1 \times N_2 = \left(\sum_{k=0}^{n_1} a_k 10^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n_2} b_k 10^k\right) = \sum_{k=0}^{n_1+n_2} c_k 10^k$$

Notre objectif se traduit par :

$$N_1 \times N_2 = \left(\sum_{k=0}^{n_1} a_k 10^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n_2} b_k 10^k\right) = \sum_{k=0}^{n_1+n_2} c_k 10^k$$

On généralise en cherchant une manière efficace de multiplier deux polynômes de degré $n$ : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, modélisés par des listes $[a_0, a_1, ..., a_n]$ et $[b_0, b_1, ..., b_n]$

Calcul classique du produit (convention : $a_j = b_j = 0$ si $j > n$) :

$$P(X)Q(X) = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k \text{ avec } c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Calcul classique du produit (convention : $a_j = b_j = 0$ si $j > n$) :

$$P(X)Q(X) = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k \text{ avec } c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Nombre d'opérations élémentaires :

- calcul de $c_k$ : $k+1$ multiplications et $k$ additions

Calcul classique du produit (convention : $a_j = b_j = 0$ si $j > n$) :

$$P(X)Q(X) = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k \text{ avec } c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Nombre d'opérations élémentaires :

- calcul de $c_k$ : $k+1$ multiplications et $k$ additions
- Au total $\sum_{k=0}^{2n}(2k+1) = (2n+1)^2 \sim 4n^2 = \theta(n^2)$

Calcul classique du produit (convention : $a_j = b_j = 0$ si $j > n$) :

$$P(X)Q(X) = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k \text{ avec } c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Nombre d'opérations élémentaires :

- calcul de $c_k$ : $k+1$ multiplications et $k$ additions
- Au total $\sum_{k=0}^{2n}(2k+1) = (2n+1)^2 \sim 4n^2 = \theta(n^2)$

Si on ne compte que les $a_k b_{n-k}$ non nuls, on améliore en $2n^2 + 2n + 1$ opérations soit encore du $\theta(n^2)$

On cherche à optimiser le nombre d'opérations selon le principe du diviser pour régner. En remarquant que si $P$ et $Q$ sont deux polynômes de degrés strictement inférieurs à $2n$ alors

$$P = P_1 + X^n P_2 \text{ et } Q = Q_1 + X^n Q_2$$

où les degrés de $P_1, P_2, Q_1$ et $Q_2$ sont strictement inférieur à $n$.

On cherche à optimiser le nombre d'opérations selon le principe du diviser pour régner. En remarquant que si $P$ et $Q$ sont deux polynômes de degrés strictement inférieurs à $2n$ alors

$$P = P_1 + X^n P_2 \text{ et } Q = Q_1 + X^n Q_2$$

où les degrés de $P_1, P_2, Q_1$ et $Q_2$ sont strictement inférieur à $n$.

$$\begin{aligned} \text{Exemple : } P(X) &= 5 - x^2 + 2X^3 - 3X^4 + 2X^6 + X^7 \\ &= \underbrace{5 - x^2 + 2X^3}_{P_1} + \underbrace{X^4(-3 + 2X^2 + X^3)}_{P_2} \end{aligned}$$

$$P = P_1 + X^n P_2 \text{ et } Q = Q_1 + X^n Q_2$$

## Exercice

1. Écrire une formule qui réduit la multiplication des polynômes $P$ et $Q$ de degrés strictement inférieurs à $2n$ en multiplications de polynômes de degrés strictement inférieurs à $n$.
2. On note $C(n)$ le coût en terme d'opérations élémentaires nécessaires à calculer le produit de deux polynômes de degrés $n$. Justifier que $C(n) = 4C(n/2) + O(n)$.
3. En posant $\alpha_\ell = \dfrac{C\left(2^\ell\right)}{4^\ell}$. Donner une relation en $\alpha_{\ell+1}$ et $\alpha_\ell$.
4. En déduire l'ordre de $C(n)$.

Si $P = P_1 + X^n P_2$ et $Q = Q_1 + X^n Q_2$, alors :

1. $P \times Q = (P_1 + X^n P_2)(Q_1 + X^n Q_2)$
   $= P_1 Q_1 X^{2n} + (P_2 Q_1 + P_1 Q_2) X^n + P_2 Q_2$
2. Le produit par $X^{2n}$ ne nécessite pas de calculs (il suffit de "décaler" les termes). Il y a 4 multiplications avec des polynômes de degrés inférieurs à $n$ et $2n + 3n + 4n = 9n$ additions ensuite.

$$C(2n) = 4C(n) + 9n$$

ou

$$C(n) = 4C(n/2) + \frac{9}{2}n$$

3. $\alpha_{\ell+1} = \dfrac{C(2^{\ell+1})}{4^{\ell+1}} = \dfrac{4C(2^\ell) + 9.2^\ell}{4^{\ell+1}} = \alpha_\ell + \dfrac{9}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^\ell$

4. En sommant l'égalité précédente :

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} \alpha_{\ell+1} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \alpha_\ell + \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^\ell$$

$$\alpha_k = \alpha_0 + \frac{9}{2}\left(1 - (1/2)^k\right) \text{ avec } \alpha_0 = \frac{C(2^0)}{4^0} = C(1) = 1.$$

$$\text{Pour } n = 2^k,\ C(n) = \frac{11}{2}n^2 - \frac{9}{2}n \sim \frac{11}{2}n^2 = \theta(n^2).$$

Ce n'est donc pas mieux...

On peut raffiner cette méthode avec la remarque suivante de **Karatsuba** : le terme intermédiaire de $PQ$ s'écrit

$$P_1 Q_2 + P_2 Q_1 = (P_1 + P_2)(Q_1 + Q_2) - P_1 Q_1 - P_2 Q_2.$$

## Exercice

1. En quoi est-ce mieux ?
2. En s'inspirant de la démarche précédente, trouver la formule de récurrence qui définit la complexité de la multiplication de Karatsuba. Quelle est sa solution ?

1. $C(2n) = 3C(n) + 13n$ ce qui est mieux a priori (plus d'additions, mais moins de multiplications)
2. Cette fois $C(n) = \theta\left(n^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}\right) = \theta\left(n^{\beta}\right)$ avec $\beta \approx 1,585$.

C'est donc mieux !

Principe : Le tri par partition-fusion (merge sort en anglais) implémente une approche de type diviser pour régner très simple :

- la suite à trier est tout d'abord scindée en deux suites de longueurs égales (à un élément près).
- Ces deux suites sont ensuite triées séparément avant d'être fusionnées.

L'efficacité du tri par fusion vient de l'efficacité de la fusion : le principe consiste à parcourir simultanément les deux suites triées dans l'ordre croissant de leurs éléments en extrayant chaque fois l'élément le plus petit.

L'algorithme :

Fonction TriParFusion($S$)
  SI $|S| > 1$ ALORS
    $(S_1, S_2) \longleftarrow$ Scinder($S$)
    $S_1 \longleftarrow$ TriParFusion $(S_1)$
    $S_2 \longleftarrow$ TriParFusion $(S_2)$
    $S \longleftarrow$ Fusion $(S_1, S_2)$
  RENVOYER $S$

5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8

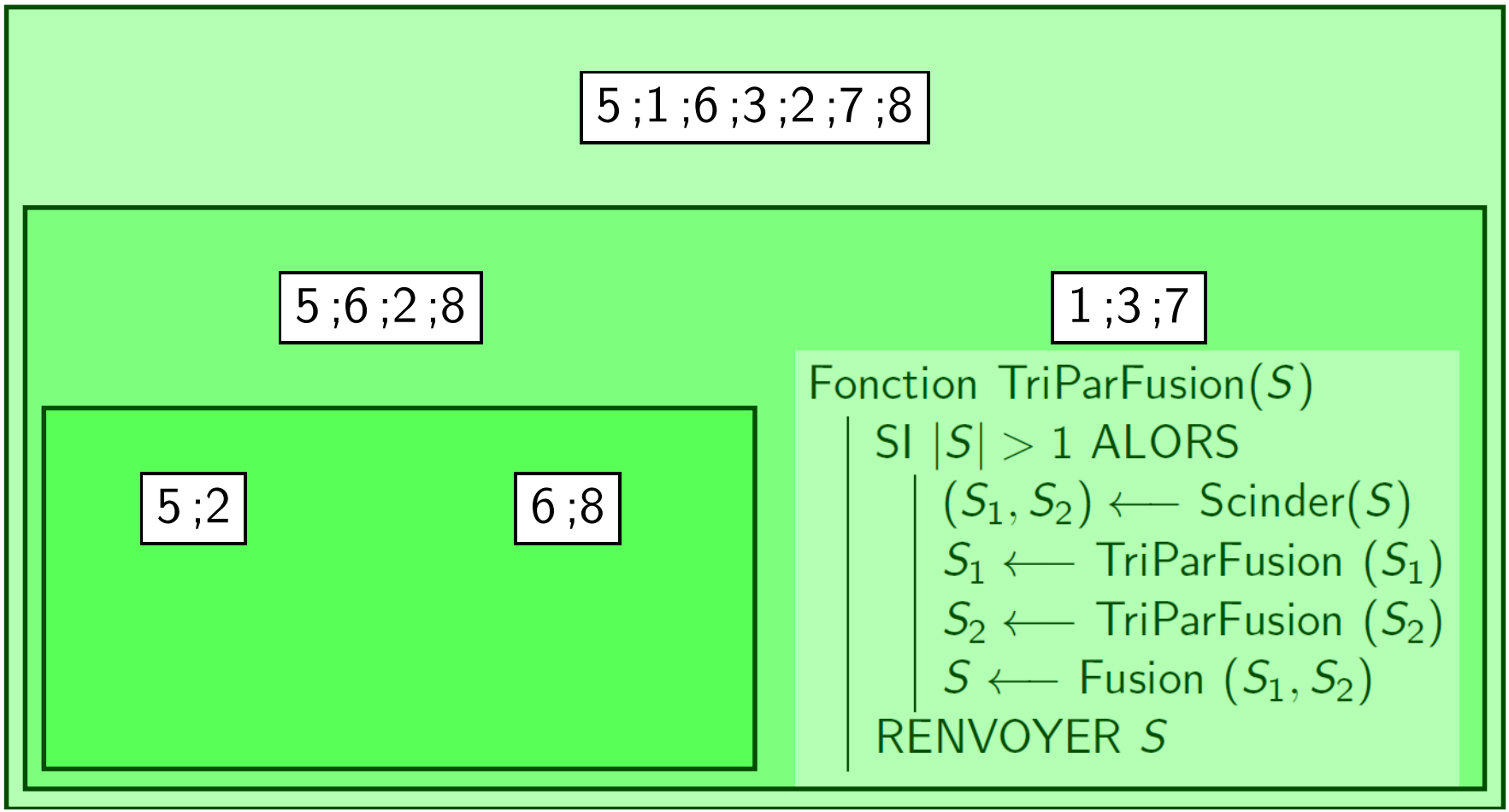
```
Fonction TriParFusion(S)
    SI |S| > 1 ALORS
        (S1, S2) ⟵ Scinder(S)
        S1 ⟵ TriParFusion (S1)
        S2 ⟵ TriParFusion (S2)
        S ⟵ Fusion (S1, S2)
    RENVOYER S
```

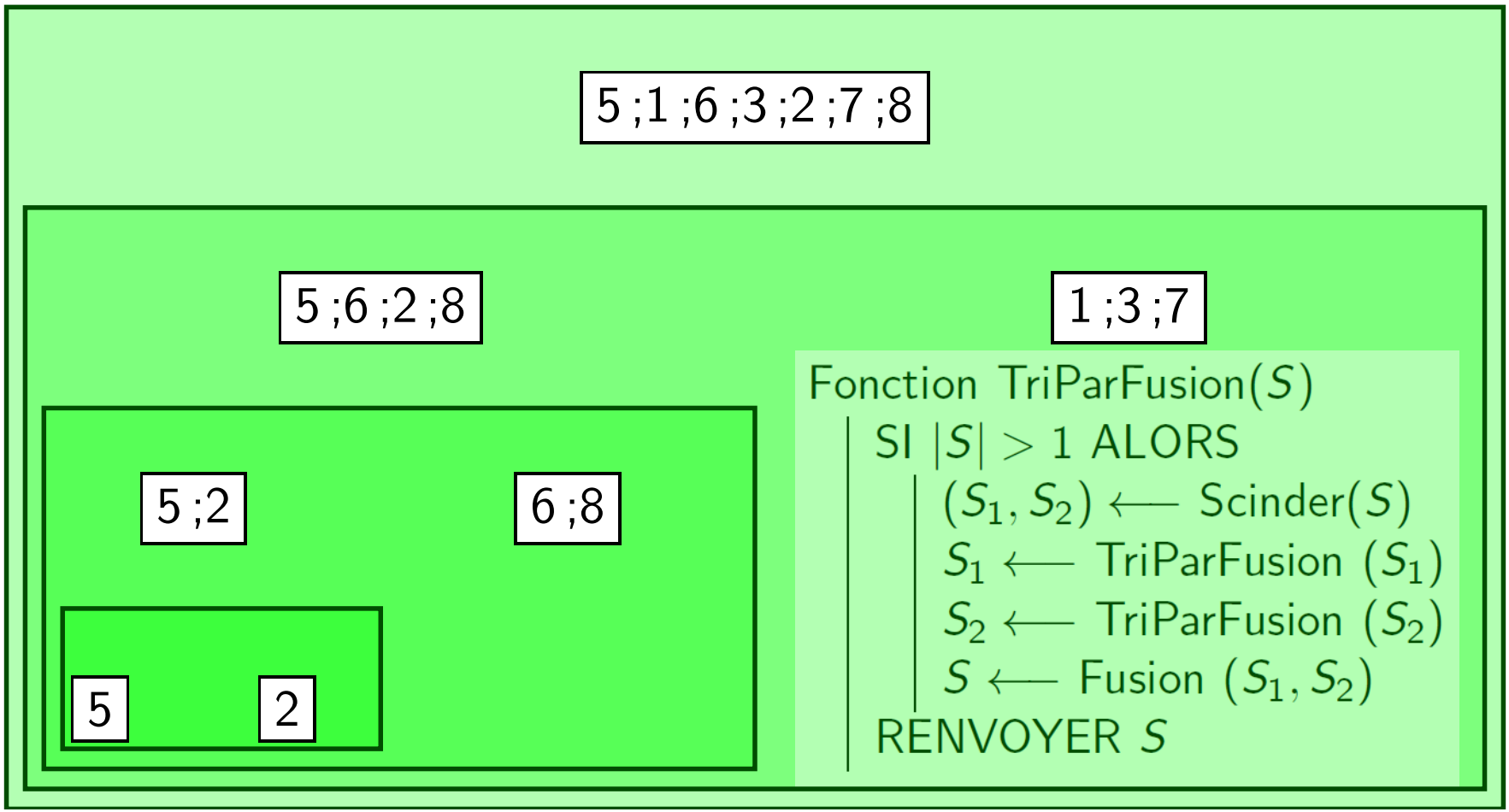
5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8

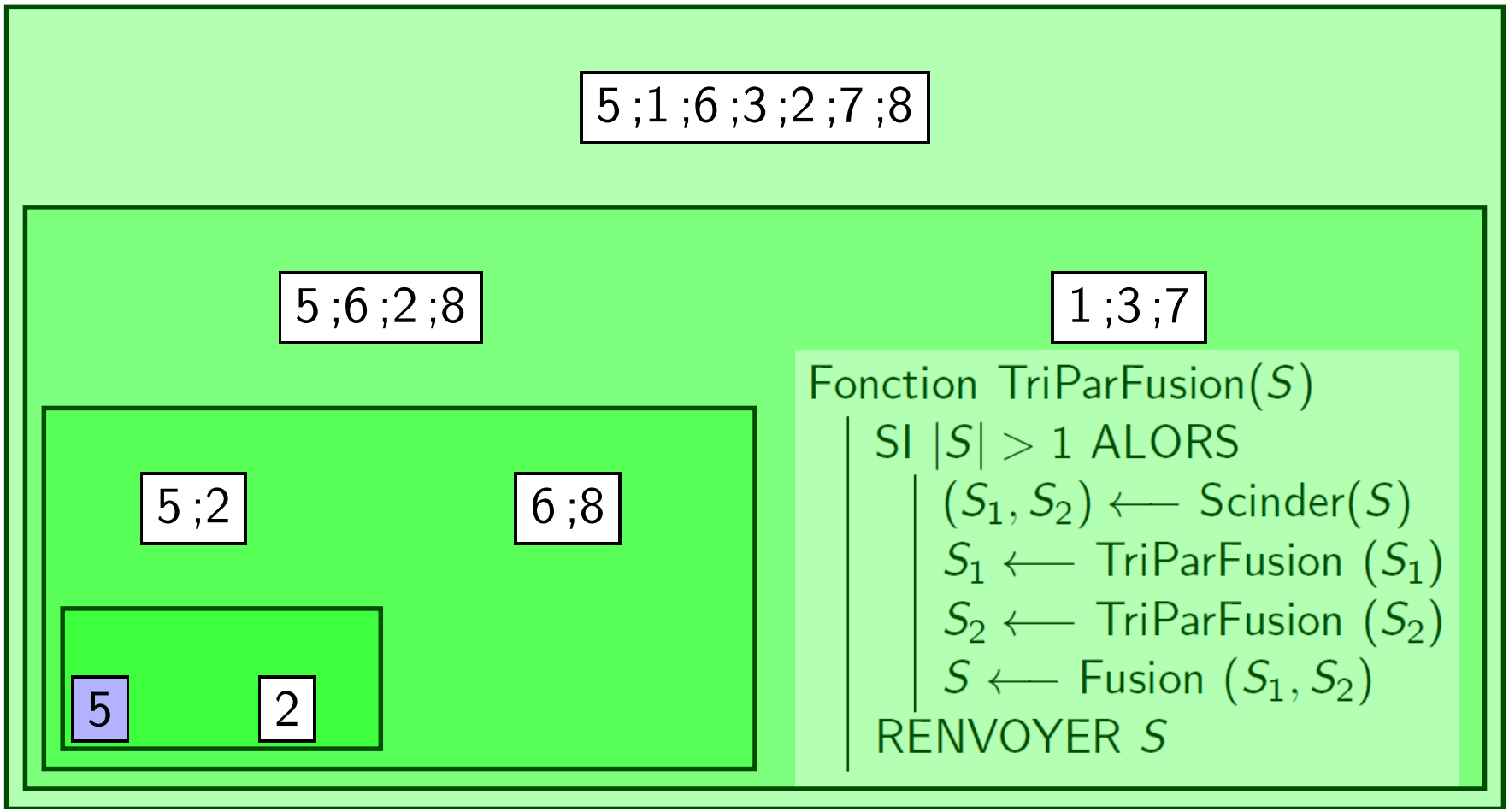
5 ;6 ;2 ;8

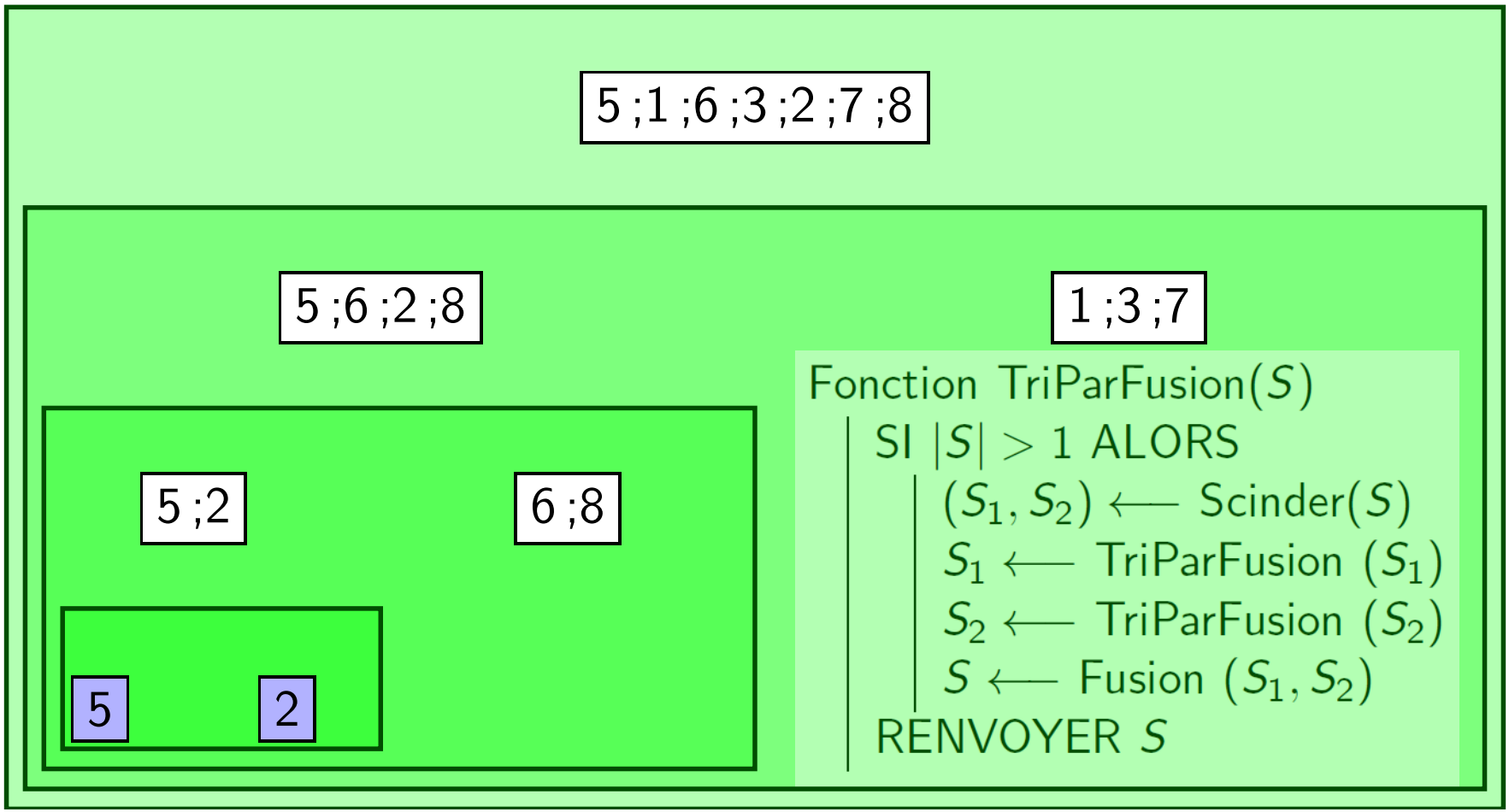
1 ;3 ;7

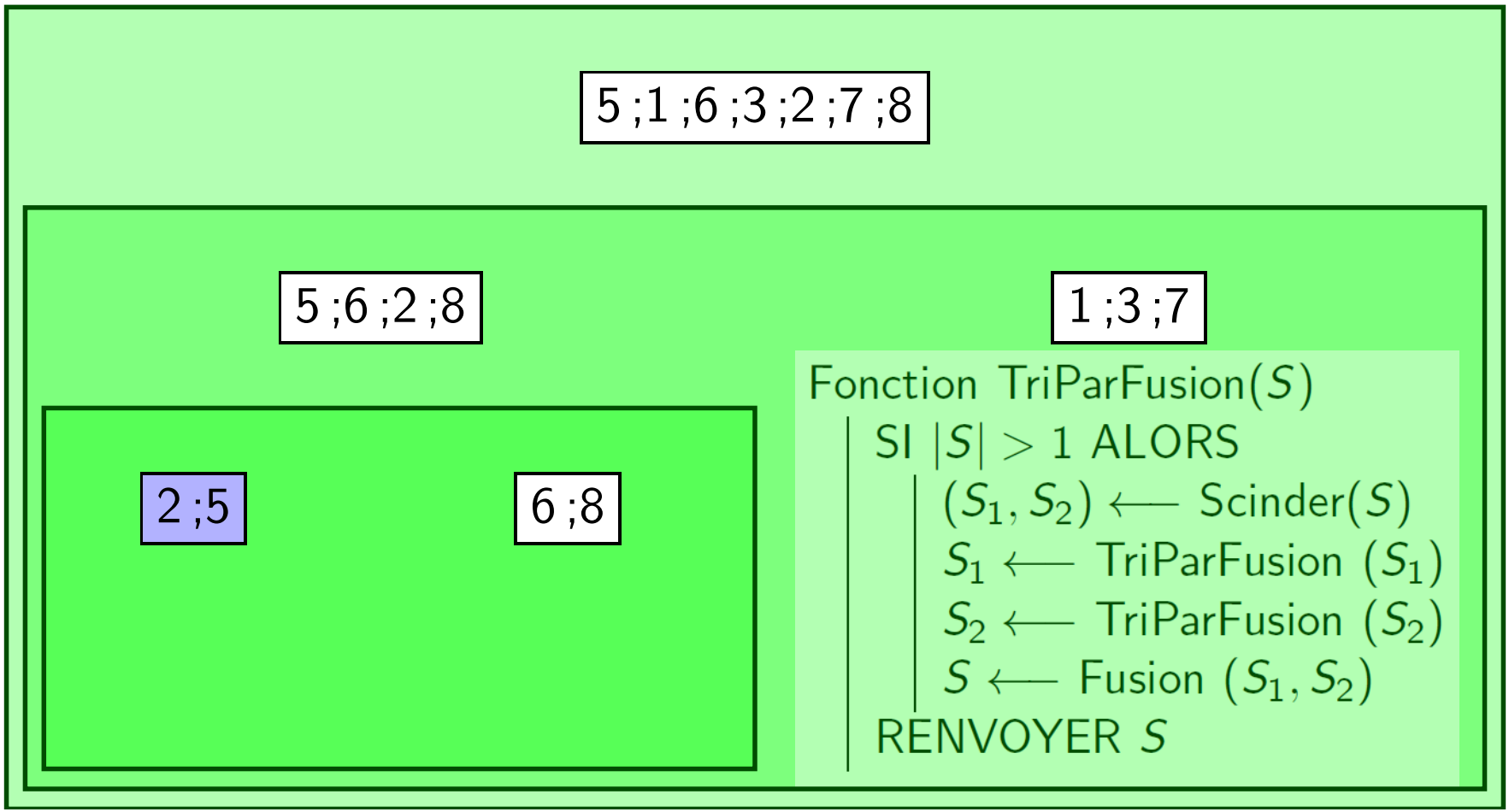
```
Fonction TriParFusion(S)
    SI |S| > 1 ALORS
        (S1, S2) ⟵ Scinder(S)
        S1 ⟵ TriParFusion (S1)
        S2 ⟵ TriParFusion (S2)
        S ⟵ Fusion (S1, S2)
    RENVOYER S
```

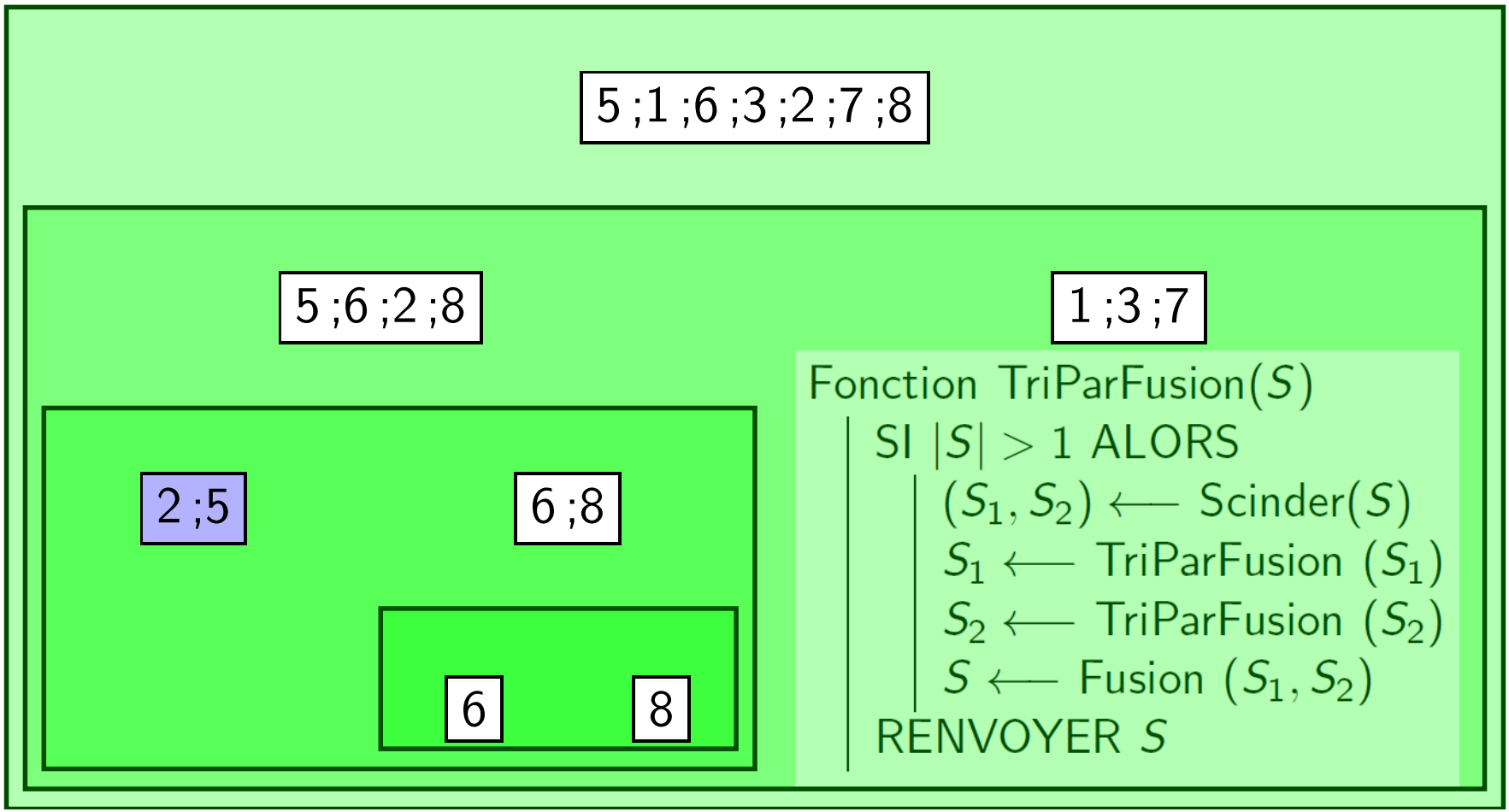

5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8
5 ;6 ;2 ;8
1 ;3 ;7
5 ;2
6 ;8
Fonction TriParFusion(S)
SI |S| > 1 ALORS
(S1, S2) ⟵ Scinder(S)
S1 ⟵ TriParFusion (S1)
S2 ⟵ TriParFusion (S2)
S ⟵ Fusion (S1, S2)
RENVOYER S

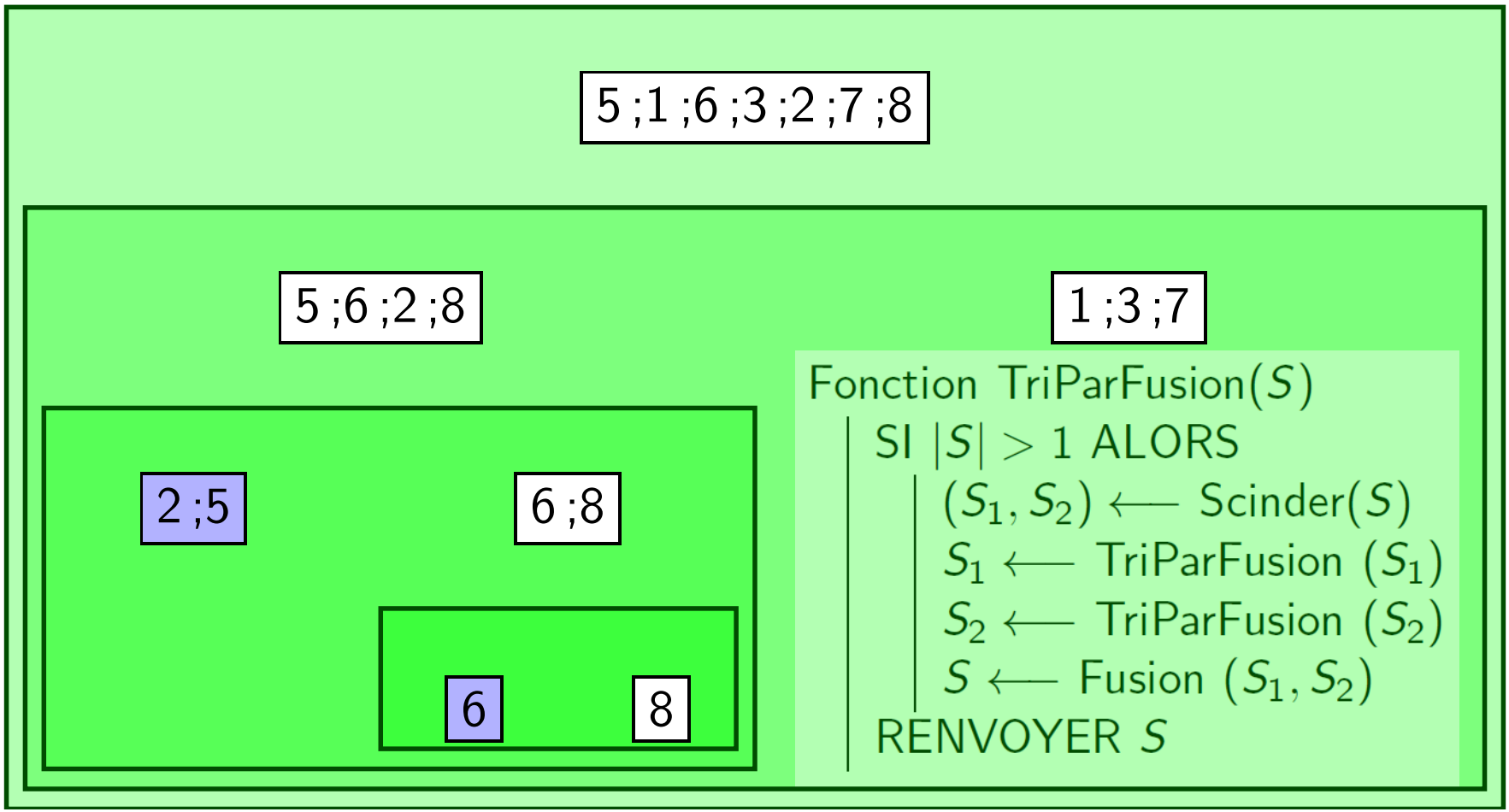

5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8
5 ;6 ;2 ;8
1 ;3 ;7
5 ;2
6 ;8
5
2
Fonction TriParFusion(S)
SI |S| > 1 ALORS
(S1, S2) ⟵ Scinder(S)
S1 ⟵ TriParFusion (S1)
S2 ⟵ TriParFusion (S2)
S ⟵ Fusion (S1, S2)
RENVOYER S

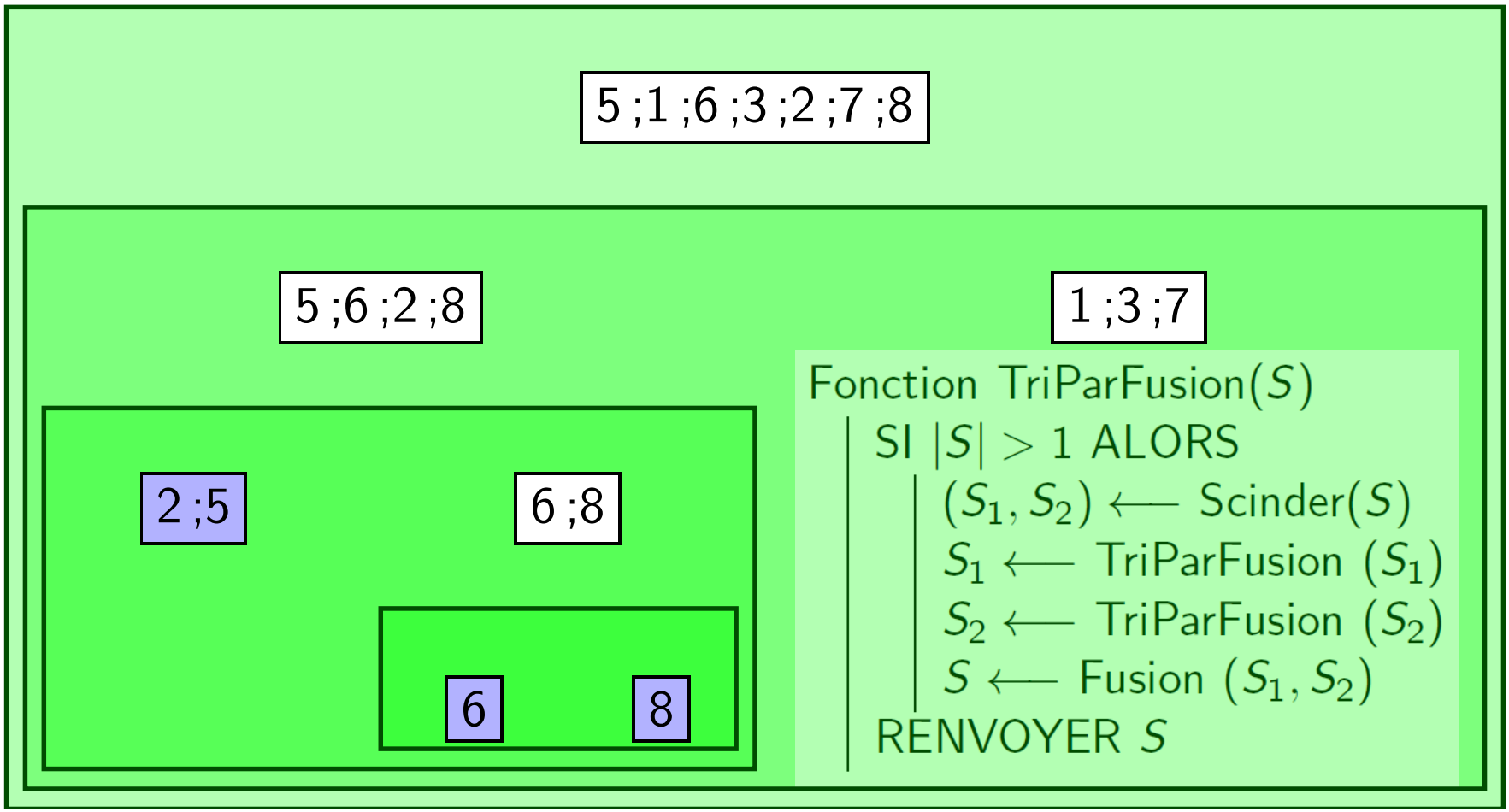

5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8
5 ;6 ;2 ;8
1 ;3 ;7
5 ;2
6 ;8
5
2
Fonction TriParFusion(S)
SI |S| > 1 ALORS
(S1, S2) ⟵ Scinder(S)
S1 ⟵ TriParFusion (S1)
S2 ⟵ TriParFusion (S2)
S ⟵ Fusion (S1, S2)
RENVOYER S

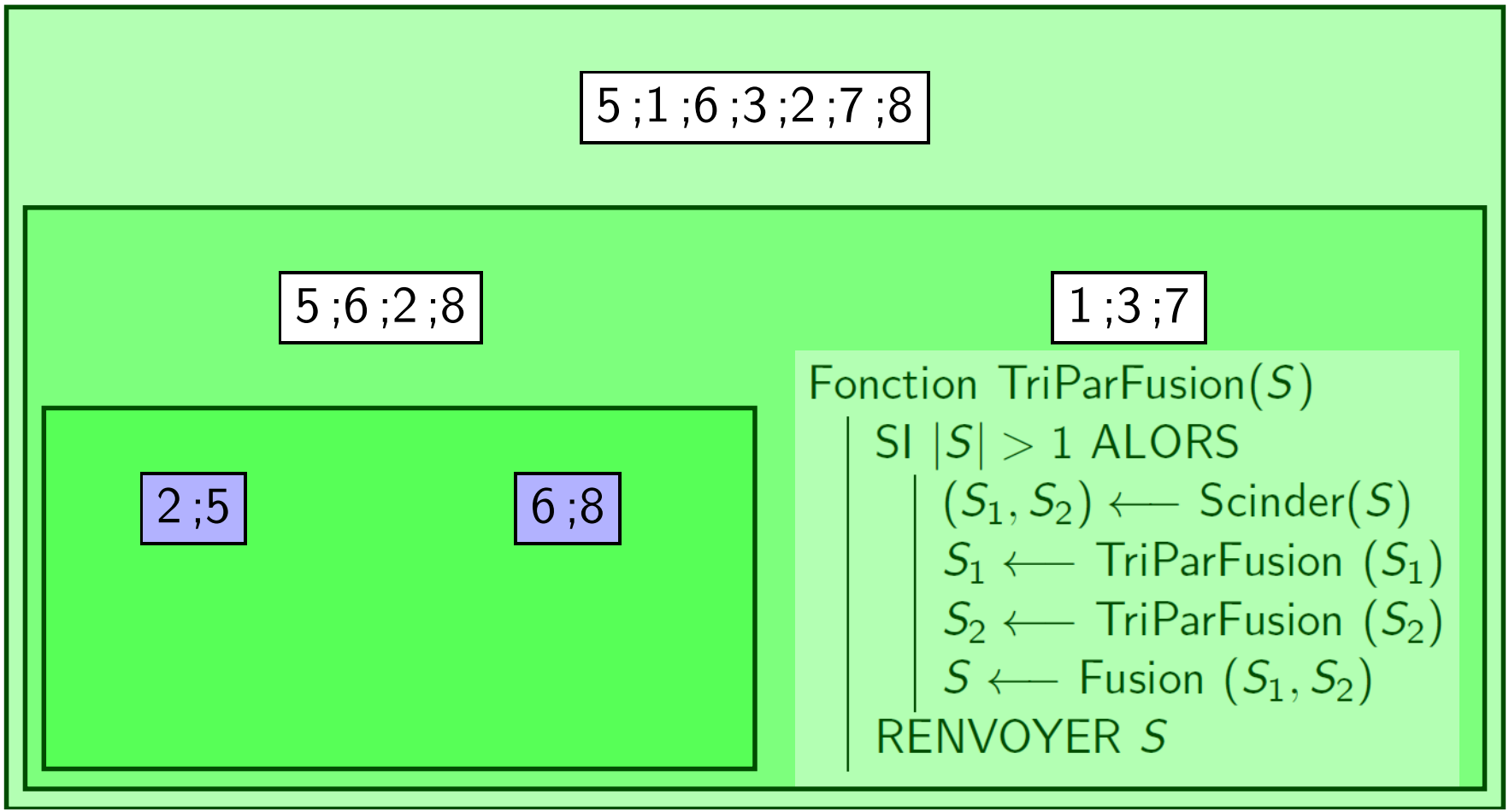

5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8
5 ;6 ;2 ;8
1 ;3 ;7
5 ;2
6 ;8
5
2
Fonction TriParFusion(S)
SI |S| > 1 ALORS
(S1, S2) ⟵ Scinder(S)
S1 ⟵ TriParFusion (S1)
S2 ⟵ TriParFusion (S2)
S ⟵ Fusion (S1, S2)
RENVOYER S

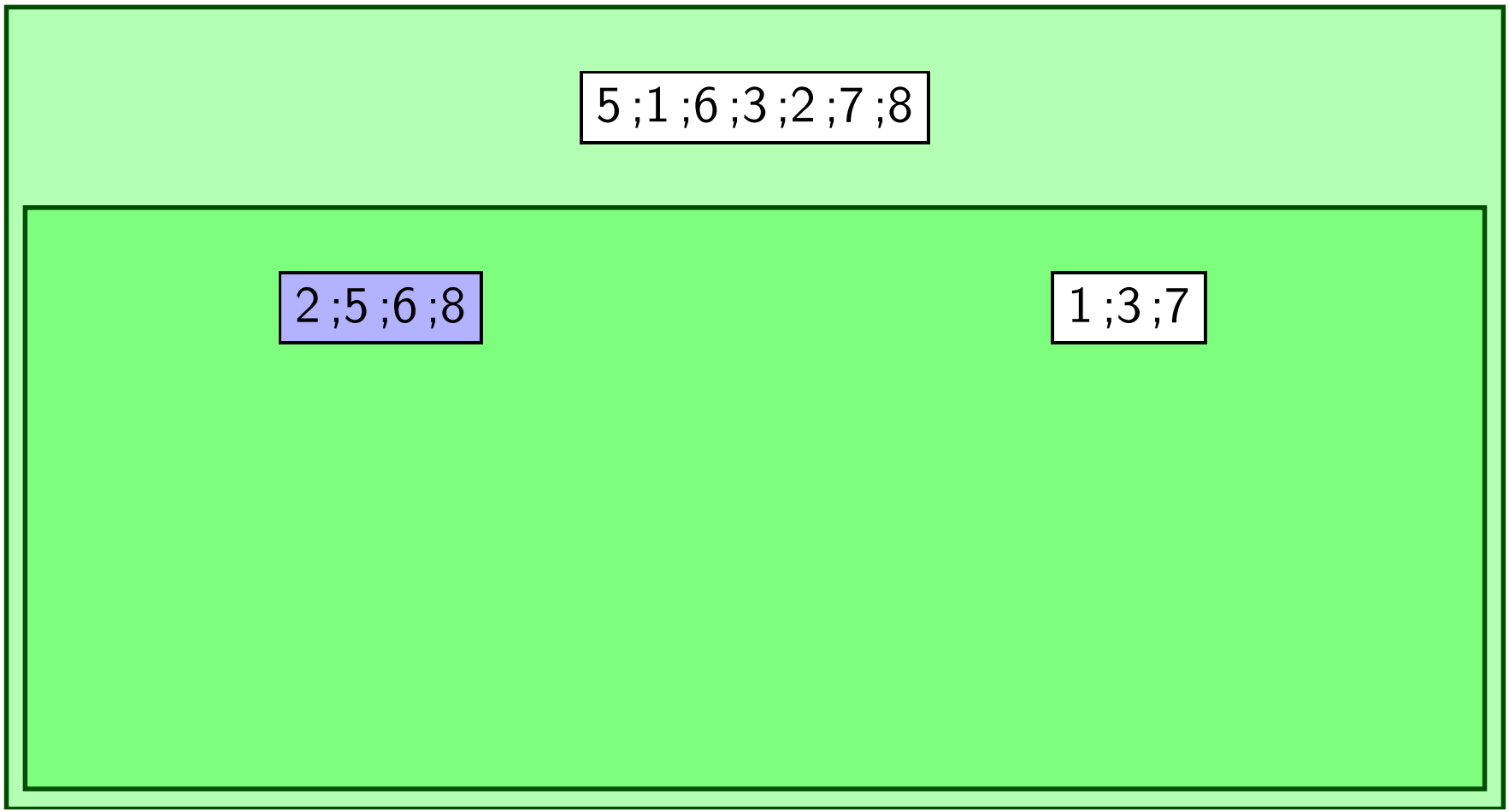

5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8
5 ;6 ;2 ;8
1 ;3 ;7
2 ;5
6 ;8
Fonction TriParFusion(S)
SI |S| > 1 ALORS
(S1, S2) ⟵ Scinder(S)
S1 ⟵ TriParFusion (S1)
S2 ⟵ TriParFusion (S2)
S ⟵ Fusion (S1, S2)
RENVOYER S

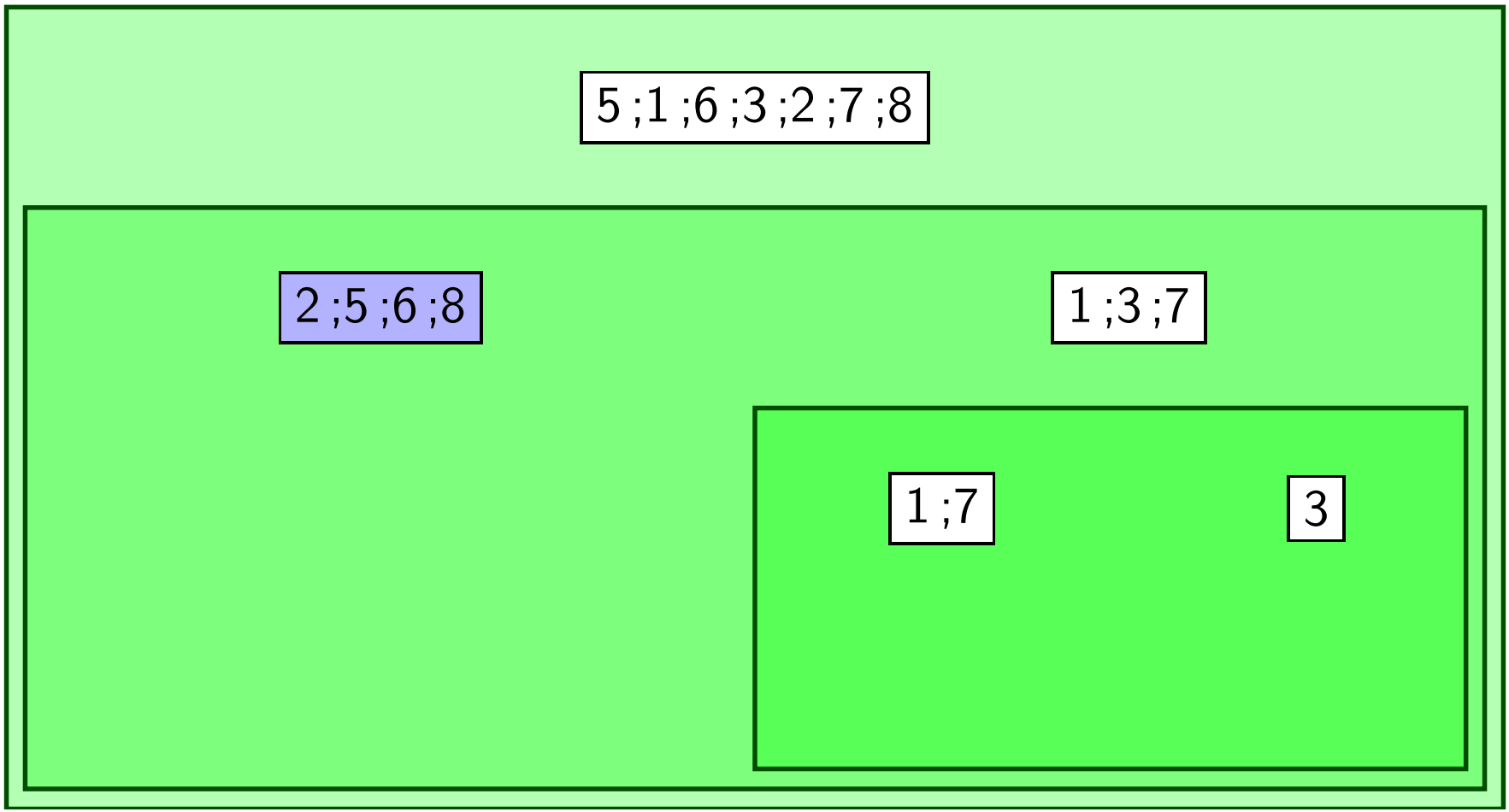

5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8
5 ;6 ;2 ;8
1 ;3 ;7
2 ;5
6 ;8
6
8
Fonction TriParFusion(S)
SI |S| > 1 ALORS
(S1, S2) ⟵ Scinder(S)
S1 ⟵ TriParFusion (S1)
S2 ⟵ TriParFusion (S2)
S ⟵ Fusion (S1, S2)
RENVOYER S

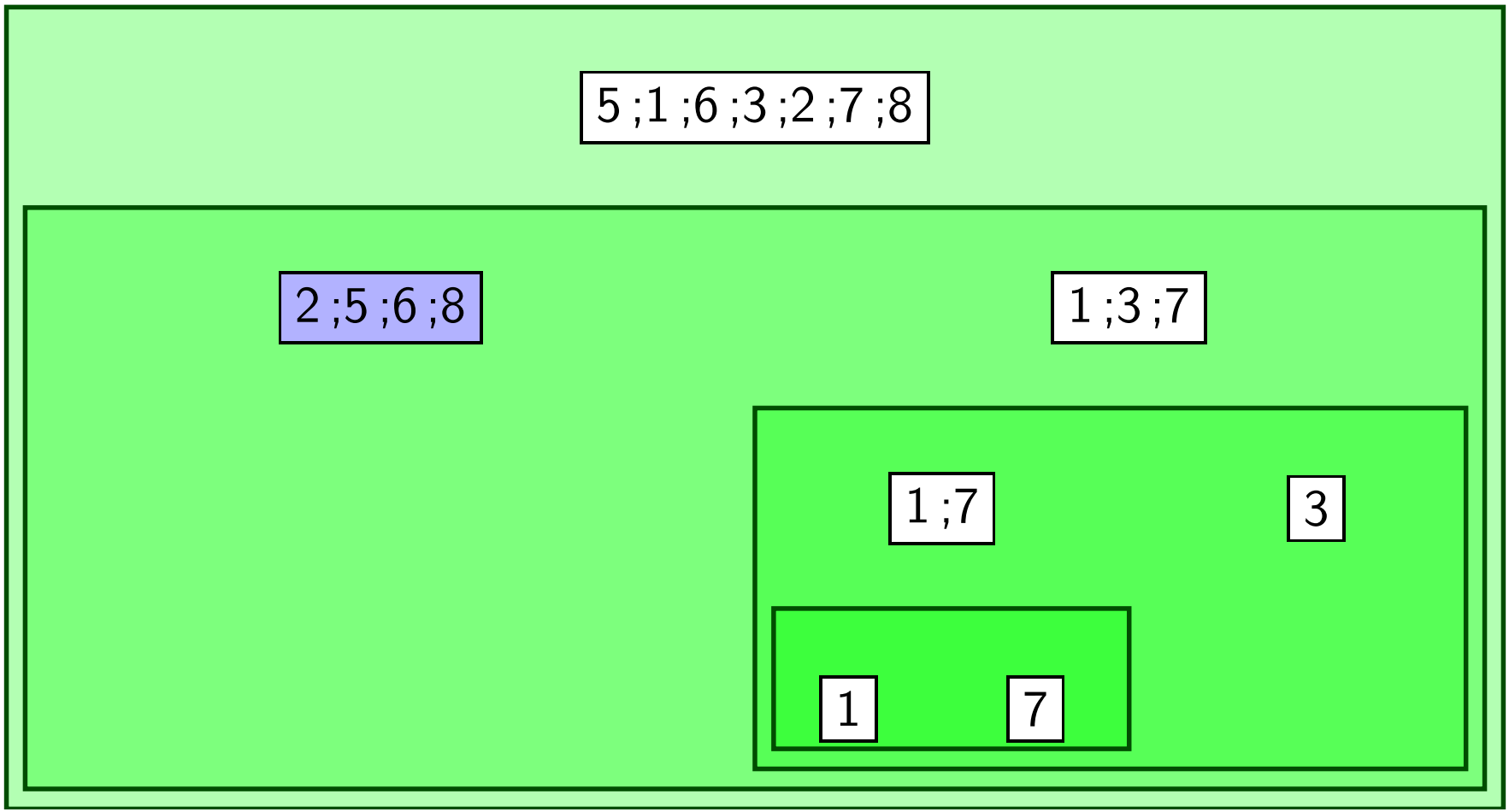

5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8
5 ;6 ;2 ;8
1 ;3 ;7
2 ;5
6 ;8
6
8
Fonction TriParFusion(S)
SI |S| > 1 ALORS
(S1, S2) ⟵ Scinder(S)
S1 ⟵ TriParFusion (S1)
S2 ⟵ TriParFusion (S2)
S ⟵ Fusion (S1, S2)
RENVOYER S

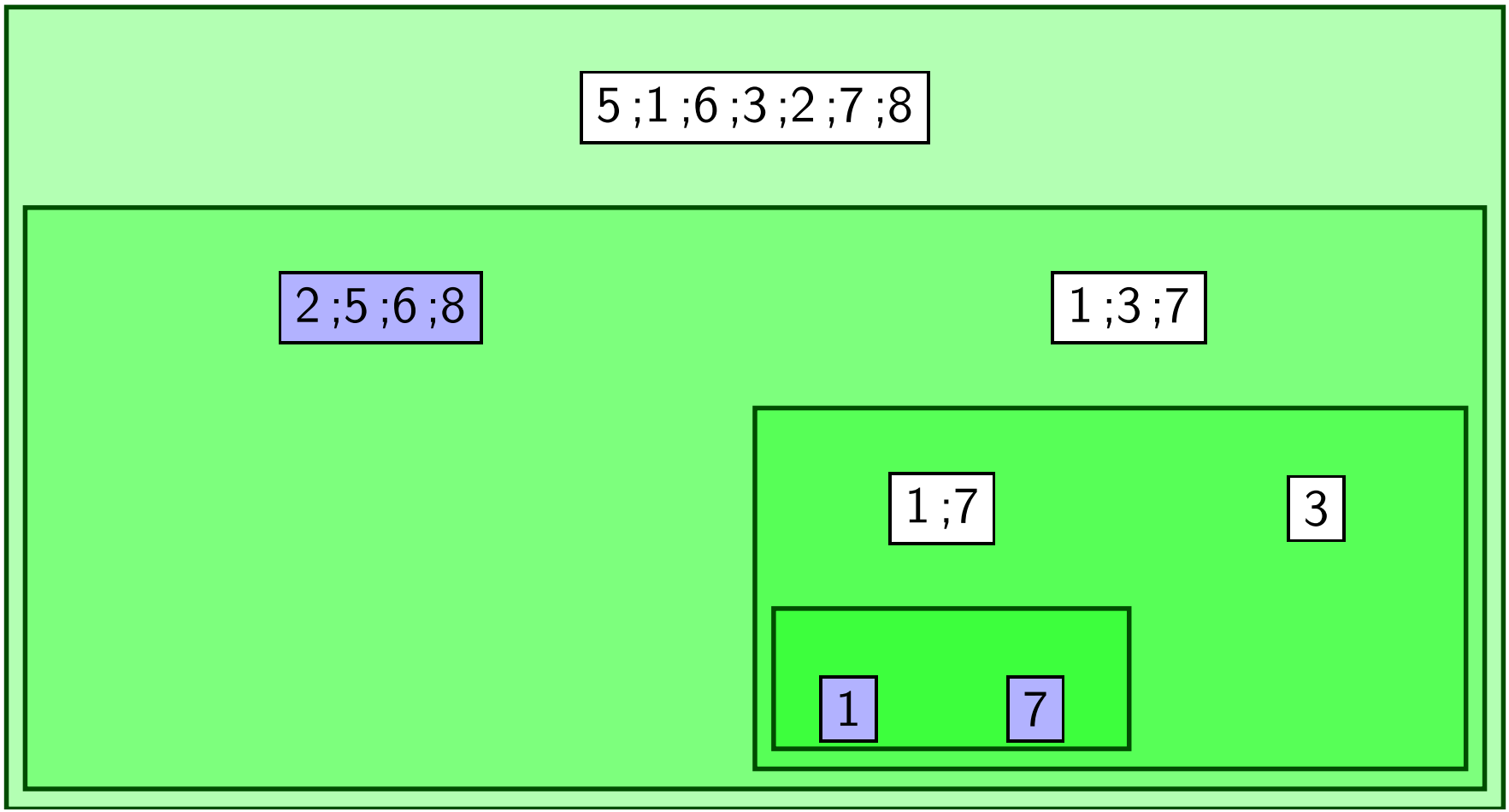

5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8
5 ;6 ;2 ;8
1 ;3 ;7
2 ;5
6 ;8
6
8
Fonction TriParFusion(S)
SI |S| > 1 ALORS
(S1, S2) ⟵ Scinder(S)
S1 ⟵ TriParFusion (S1)
S2 ⟵ TriParFusion (S2)
S ⟵ Fusion (S1, S2)
RENVOYER S

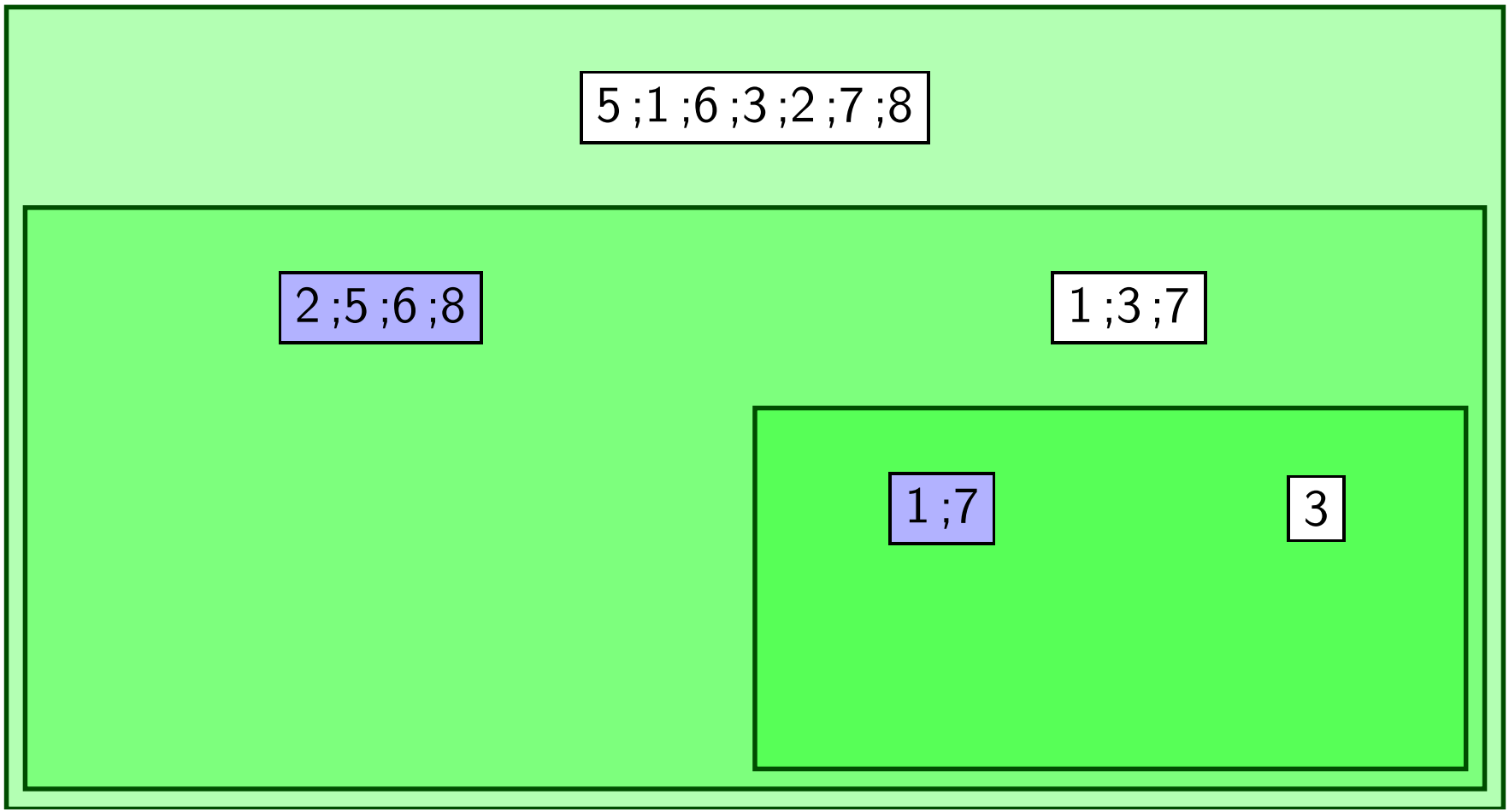

5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8
5 ;6 ;2 ;8
1 ;3 ;7
2 ;5
6 ;8
Fonction TriParFusion(S)
SI |S| > 1 ALORS
(S1, S2) ⟵ Scinder(S)
S1 ⟵ TriParFusion (S1)
S2 ⟵ TriParFusion (S2)
S ⟵ Fusion (S1, S2)
RENVOYER S

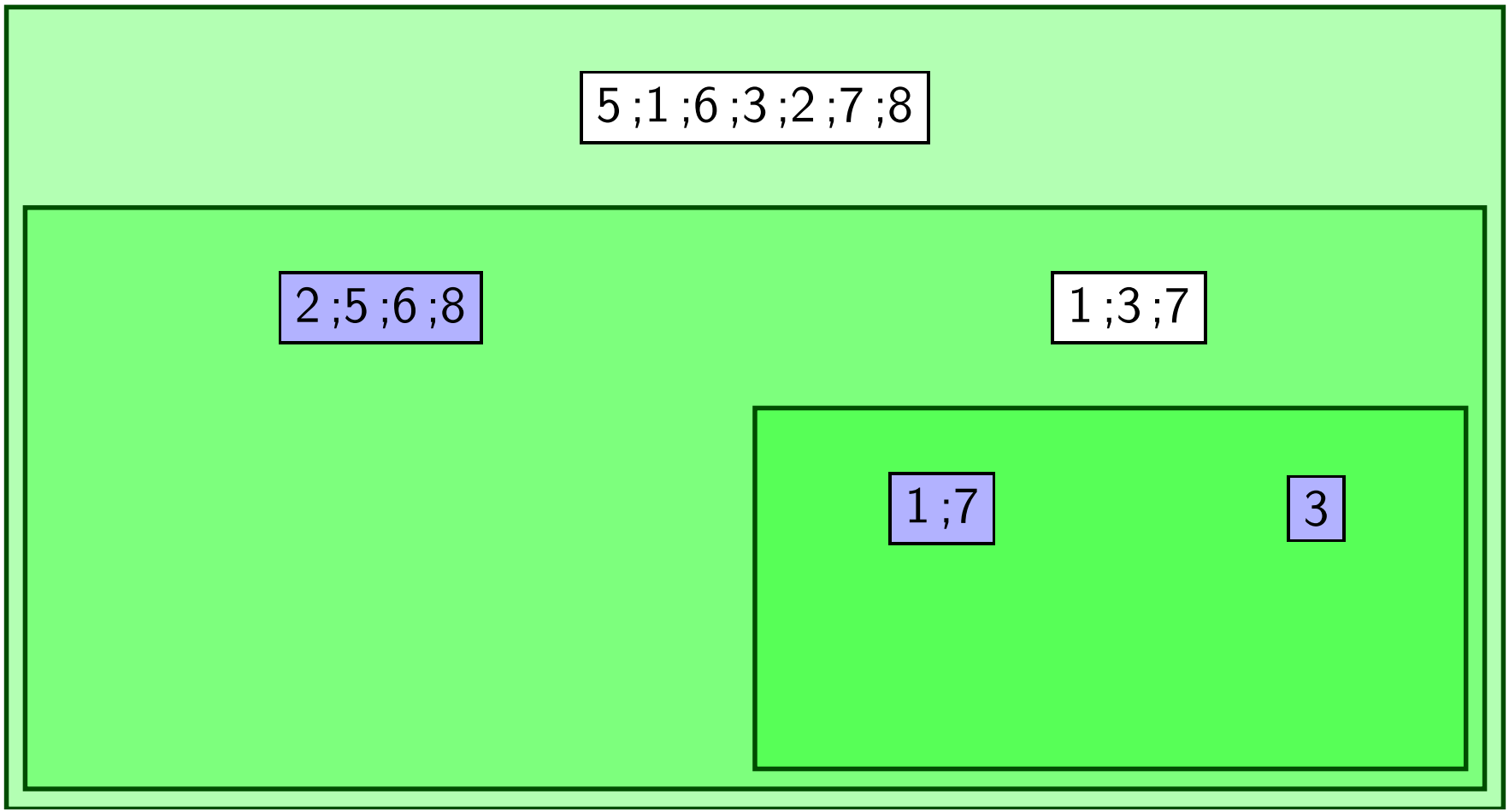

5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8
2 ;5 ;6 ;8
1 ;3 ;7

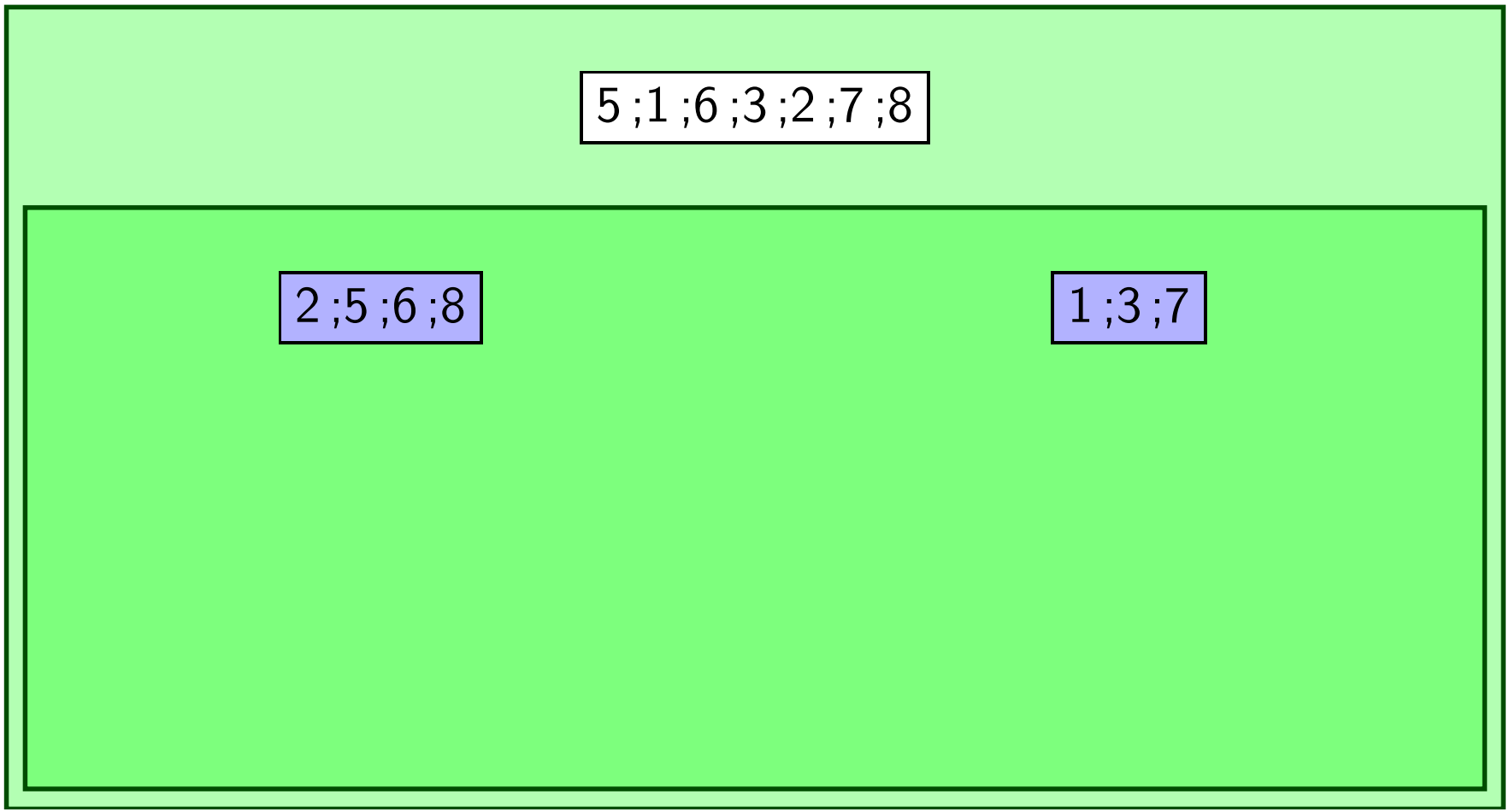

5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8
2 ;5 ;6 ;8
1 ;3 ;7
1 ;7
3


5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8
2 ;5 ;6 ;8
1 ;3 ;7
1 ;7
3
1
7


5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8
2 ;5 ;6 ;8
1 ;3 ;7
1 ;7
3
1
7


5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8
2 ;5 ;6 ;8
1 ;3 ;7
1 ;7
3


5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8
2 ;5 ;6 ;8
1 ;3 ;7
1 ;7
3


5 ;1 ;6 ;3 ;2 ;7 ;8
2 ;5 ;6 ;8
1 ;3 ;7

1 ;2 ;3 ;5 ;6 ;7 ;8

FIN

# Calcul de la complexité

## Exercice

Soit $T(n)$ le nombre de comparaisons pour trier une liste à $n$ éléments.

1. Estimer le nombre de comparaisons pour :
   1. Scinder
   2. Trier
   3. Fusionner
2. En déduire une relation entre $T(n)$ et $T(n/2)$
3. Donner l'ordre de $T(n)$

Si $n$ est pair, soit $T(n)$ le nombre de comparaisons pour trier une liste à $n$ éléments.

$n$ éléments

| 9 ;1 ;8 ;4 ;7 ;3 |
|---|

Si $n$ est pair, soit $T(n)$ le nombre de comparaisons pour trier une liste à $n$ éléments.

$n$ éléments

9 ;1 ;8 ;4 ;7 ;3

Scinder

$n/2$ éléments

9 ;8 ;7

$n/2$ éléments

1 ;4 ;3

Si $n$ est pair, soit $T(n)$ le nombre de comparaisons pour trier une liste à $n$ éléments.

$n$ éléments

9 ;1 ;8 ;4 ;7 ;3

0 comparaison Scinder

$n/2$ éléments

9 ;8 ;7

$n/2$ éléments

1 ;4 ;3

Si $n$ est pair, soit $T(n)$ le nombre de comparaisons pour trier une liste à $n$ éléments.

$n$ éléments

9 ;1 ;8 ;4 ;7 ;3

0 comparaison Scinder

Trier

$n/2$ éléments

7 ;8 ;9

$n/2$ éléments

1 ;3 ;4

Si $n$ est pair, soit $T(n)$ le nombre de comparaisons pour trier une liste à $n$ éléments.

$n$ éléments

9 ;1 ;8 ;4 ;7 ;3

0 comparaison Scinder

$2 \times T\left(\frac{n}{2}\right)$ comparaisons Trier

$n/2$ éléments: 7 ;8 ;9

$n/2$ éléments: 1 ;3 ;4

Si $n$ est pair, soit $T(n)$ le nombre de comparaisons pour trier une liste à $n$ éléments.

$n$ éléments

1 ;3 ;4 ;7 ;8 ;9

0 comparaison Scinder

$2 \times T\left(\frac{n}{2}\right)$ comparaisons Trier

$n/2$ éléments

7 ;8 ;9

$n/2$ éléments

1 ;3 ;4

Fusionner

Si $n$ est pair, soit $T(n)$ le nombre de comparaisons pour trier une liste à $n$ éléments.

$n$ éléments

1 ;3 ;4 ;7 ;8 ;9

0 comparaison Scinder

$2 \times T\left(\frac{n}{2}\right)$ comparaisons Trier

$n/2$ éléments

7 ;8 ;9

$n/2$ éléments

1 ;3 ;4

$n$ comparaisons Fusionner

Si $n$ est pair, soit $T(n)$ le nombre de comparaisons pour trier une liste à $n$ éléments.

$n$ éléments

1 ;3 ;4 ;7 ;8 ;9

0 comparaison Scinder

$2 \times T\left(\frac{n}{2}\right)$ comparaisons Trier

$n$ comparaisons Fusionner

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Posons $u_\ell = \dfrac{T(2^\ell)}{2^\ell}$.

Posons $u_\ell = \dfrac{T(2^\ell)}{2^\ell}$. $u_0 = \dfrac{T(2^0)}{2^0} = T(1)$

Posons $u_\ell = \dfrac{T(2^\ell)}{2^\ell}$. $\quad u_0 = \dfrac{T(2^0)}{2^0} = T(1) = 0.$

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_{\ell+1} = \frac{T(2^{\ell+1})}{2^{\ell+1}}$$

Posons $u_\ell = \dfrac{T(2^\ell)}{2^\ell}$. $\quad u_0 = \dfrac{T(2^0)}{2^0} = T(1) = 0.$

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_{\ell+1} = \frac{T(2^{\ell+1})}{2^{\ell+1}} = \frac{2T(2^\ell) + 2^{\ell+1}}{2^{\ell+1}}$$

Posons $u_\ell = \dfrac{T(2^\ell)}{2^\ell}$. $\quad u_0 = \dfrac{T(2^0)}{2^0} = T(1) = 0.$

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_{\ell+1} = \frac{T(2^{\ell+1})}{2^{\ell+1}} = \frac{2T(2^\ell) + 2^{\ell+1}}{2^{\ell+1}} = \frac{T(2^\ell)}{2^\ell} + 1$$

Posons $u_\ell = \dfrac{T(2^\ell)}{2^\ell}$. $\quad u_0 = \dfrac{T(2^0)}{2^0} = T(1) = 0.$

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_{\ell+1} = \frac{T(2^{\ell+1})}{2^{\ell+1}} = \frac{2T(2^\ell) + 2^{\ell+1}}{2^{\ell+1}} = \frac{T(2^\ell)}{2^\ell} + 1 = u_\ell + 1$$

$(u_\ell)$ est donc une suite arithmétique,

Posons $u_\ell = \dfrac{T(2^\ell)}{2^\ell}$. $\quad u_0 = \dfrac{T(2^0)}{2^0} = T(1) = 0.$

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_{\ell+1} = \frac{T(2^{\ell+1})}{2^{\ell+1}} = \frac{2T(2^\ell) + 2^{\ell+1}}{2^{\ell+1}} = \frac{T(2^\ell)}{2^\ell} + 1 = u_\ell + 1$$

$\left(u_\ell\right)$ est donc une suite arithmétique,ainsi

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_\ell = u_0 + \ell \times 1 = \ell.$$

Posons $u_\ell = \dfrac{T(2^\ell)}{2^\ell}$. $\quad u_0 = \dfrac{T(2^0)}{2^0} = T(1) = 0.$

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_{\ell+1} = \frac{T(2^{\ell+1})}{2^{\ell+1}} = \frac{2T(2^\ell) + 2^{\ell+1}}{2^{\ell+1}} = \frac{T(2^\ell)}{2^\ell} + 1 = u_\ell + 1$$

$(u_\ell)$ est donc une suite arithmétique,ainsi

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_\ell = u_0 + \ell \times 1 = \ell.$$

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ T(2^\ell) = 2^\ell u_\ell$$

Posons $u_\ell = \dfrac{T(2^\ell)}{2^\ell}$. $\quad u_0 = \dfrac{T(2^0)}{2^0} = T(1) = 0.$

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_{\ell+1} = \frac{T(2^{\ell+1})}{2^{\ell+1}} = \frac{2T(2^\ell) + 2^{\ell+1}}{2^{\ell+1}} = \frac{T(2^\ell)}{2^\ell} + 1 = u_\ell + 1$$

$\left(u_\ell\right)$ est donc une suite arithmétique,ainsi

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_\ell = u_0 + \ell \times 1 = \ell.$$

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ T(2^\ell) = 2^\ell u_\ell = \ell 2^\ell.$$

Posons $u_\ell = \dfrac{T(2^\ell)}{2^\ell}$. $u_0 = \dfrac{T(2^0)}{2^0} = T(1) = 0$.

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_{\ell+1} = \frac{T(2^{\ell+1})}{2^{\ell+1}} = \frac{2T(2^\ell) + 2^{\ell+1}}{2^{\ell+1}} = \frac{T(2^\ell)}{2^\ell} + 1 = u_\ell + 1$$

$(u_\ell)$ est donc une suite arithmétique,ainsi

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_\ell = u_0 + \ell \times 1 = \ell.$$

$\forall \ell \in \mathbb{N},\ T(2^\ell) = 2^\ell u_\ell = \ell 2^\ell$.Or $n = 2^\ell \iff \ell = \log_2 n$.

Posons $u_\ell = \dfrac{T(2^\ell)}{2^\ell}$. $\quad u_0 = \dfrac{T(2^0)}{2^0} = T(1) = 0.$

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_{\ell+1} = \frac{T(2^{\ell+1})}{2^{\ell+1}} = \frac{2T(2^\ell) + 2^{\ell+1}}{2^{\ell+1}} = \frac{T(2^\ell)}{2^\ell} + 1 = u_\ell + 1$$

$\left(u_\ell\right)$ est donc une suite arithmétique,ainsi

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_\ell = u_0 + \ell \times 1 = \ell.$$

$\forall \ell \in \mathbb{N},\ T(2^\ell) = 2^\ell u_\ell = \ell 2^\ell$.Or $n = 2^\ell \iff \ell = \log_2 n$.

Ainsi, si $n$ est une puissance de 2, on a montré que

$$T(n) = n \log_2 n$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

- D'une part $\exists m$, puissance de 2 telle que $m \leqslant n < 2m$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

- D'une part $\exists m$, puissance de 2 telle que $m \leqslant n < 2m$.
- Assez intuitivement, $T(m) \leqslant T(n) \leqslant T(2m)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

- D'une part $\exists m$, puissance de 2 telle que $m \leqslant n < 2m$.
- Assez intuitivement, $T(m) \leqslant T(n) \leqslant T(2m)$
- $T(m) = m \log_2 m$ et $T(2m) = 2m \log_2(2m)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

- D'une part $\exists m$, puissance de 2 telle que $m \leqslant n < 2m$.
- Assez intuitivement, $T(m) \leqslant T(n) \leqslant T(2m)$
- $T(m) = m \log_2 m$ et $T(2m) = 2m \log_2(2m)$.

$$\frac{T(m)}{n \ln n} \leqslant \frac{T(n)}{n \ln n} \leqslant \frac{T(2m)}{n \ln n}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

- D'une part $\exists m$, puissance de 2 telle que $m \leqslant n < 2m$.
- Assez intuitivement, $T(m) \leqslant T(n) \leqslant T(2m)$
- $T(m) = m \log_2 m$ et $T(2m) = 2m \log_2(2m)$.

$$\frac{T(m)}{n \ln n} \leqslant \frac{T(n)}{n \ln n} \leqslant \frac{T(2m)}{n \ln n}$$

Donc,

$$\frac{m \log_2 m}{n \ln n} \leqslant \frac{T(n)}{n \ln n} \leqslant \frac{2m \log_2(2m)}{n \ln n}$$

$$\frac{m \log_2 m}{n \ln n} \leqslant \frac{T(n)}{n \ln n} \leqslant \frac{2m \log_2(2m)}{n \ln n} \text{ et } m \leqslant n < 2m$$

$$\frac{m \log_2 m}{n \ln n} \leqslant \frac{T(n)}{n \ln n} \leqslant \frac{2m \log_2(2m)}{n \ln n} \text{ et } m \leqslant n < 2m$$

Or,

- $$\frac{m \log_2(m)}{n \ln n} > \frac{n/2 \log_2(n/2)}{n \ln n} = \underbrace{\frac{\log_2(n) - 1}{2 \ln n}}_{u_n}$$

$$\frac{m \log_2 m}{n \ln n} \leqslant \frac{T(n)}{n \ln n} \leqslant \frac{2m \log_2(2m)}{n \ln n} \text{ et } m \leqslant n < 2m$$

Or,

- $$\frac{m \log_2(m)}{n \ln n} > \frac{n/2 \log_2(n/2)}{n \ln n} = \underbrace{\frac{\log_2(n) - 1}{2 \ln n}}_{u_n}$$

  $$u_n = \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{2 \ln n} \to \frac{1}{2 \ln 2}$$

  Cette suite converge et donc est minorée par un réel $M_1$.

$$\frac{m \log_2 m}{n \ln n} \leqslant \frac{T(n)}{n \ln n} \leqslant \frac{2m \log_2(2m)}{n \ln n} \text{ et } m \leqslant n < 2m$$

Or,

- $$\frac{m \log_2(m)}{n \ln n} > \frac{n/2 \log_2(n/2)}{n \ln n} = \underbrace{\frac{\log_2(n) - 1}{2 \ln n}}_{u_n}$$

  $$u_n = \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{2 \ln n} \to \frac{1}{2 \ln 2}$$

  Cette suite converge et donc est minorée par un réel $M_1$.
- $$\frac{2m \log_2(2m)}{n \ln n} = \frac{2m \log_2(m) + 2m}{n \ln n} \leqslant \underbrace{\frac{2n \log_2(n) + 2n}{n \ln n}}_{v_n}$$

$$\frac{m \log_2 m}{n \ln n} \leqslant \frac{T(n)}{n \ln n} \leqslant \frac{2m \log_2(2m)}{n \ln n} \text{ et } m \leqslant n < 2m$$

Or,

- $$\frac{m \log_2(m)}{n \ln n} > \frac{n/2 \log_2(n/2)}{n \ln n} = \underbrace{\frac{\log_2(n) - 1}{2 \ln n}}_{u_n}$$

  $$u_n = \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{2 \ln n} \to \frac{1}{2 \ln 2}$$

  Cette suite converge et donc est minorée par un réel $M_1$.
- $$\frac{2m \log_2(2m)}{n \ln n} = \frac{2m \log_2(m) + 2m}{n \ln n} \leqslant \underbrace{\frac{2n \log_2(n) + 2n}{n \ln n}}_{v_n}$$

  $$v_n = \frac{2n \log_2(n)}{n \ln n} + \frac{2n}{n \ln n} \to \frac{2}{\ln 2}$$

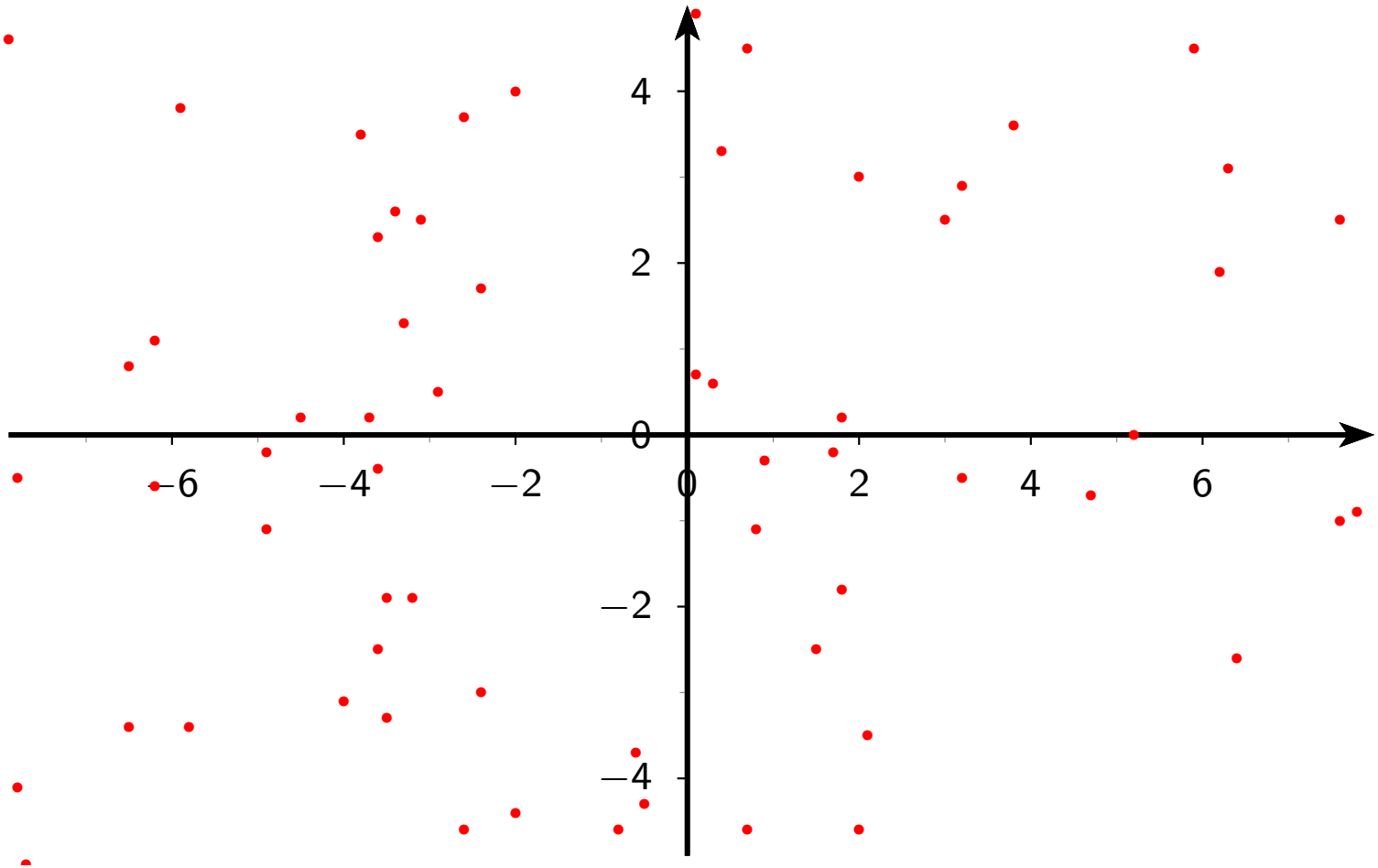
  Cette suite converge et donc est majorée par un réel $M_2$.

Conclusion :

$$\exists M_1, M_2 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_1 \leqslant \frac{T(n)}{n \ln n} \leqslant M_2$$

C'est-à-dire

$$T(n) = \theta(n \ln n)$$




Quels sont les 2 points les plus proches ? A quelle distance sont-ils ?

## Exercice

Si les points sont regroupés en tableau de coordonnées, proposer une solution naïve et calculer sa complexité.

## Exercice

Si les points sont regroupés en tableau de coordonnées, proposer une solution naïve et calculer sa complexité.

Il y a $\binom{n}{2}$ paires de points, si on cherche la plus petite distance, il y aura donc $\frac{n(n-1)}{2}$ calculs et comparaisons.

## Exercice

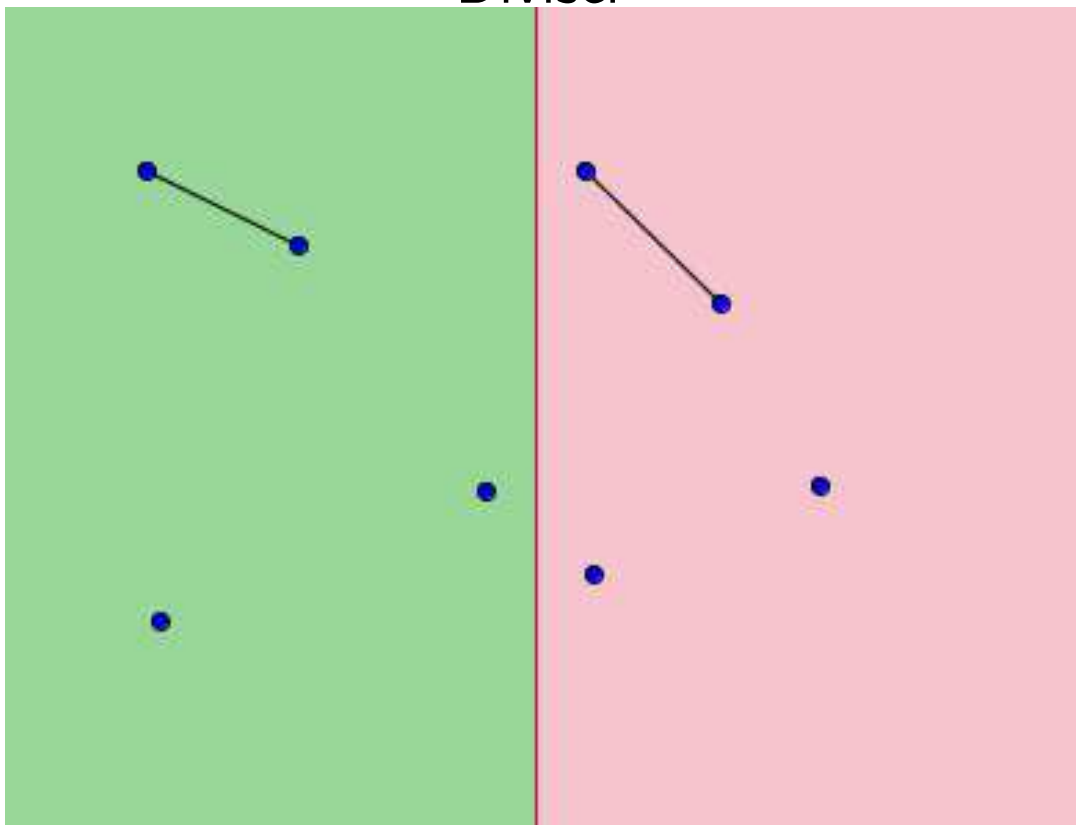
Si les points sont regroupés en tableau de coordonnées, proposer une solution naïve et calculer sa complexité.

Il y a $\binom{n}{2}$ paires de points, si on cherche la plus petite distance, il y aura donc $\frac{n(n-1)}{2}$ calculs et comparaisons.

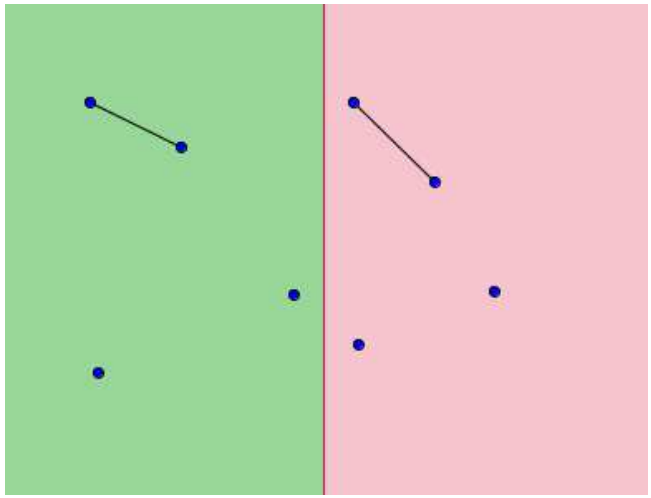
La complexité est en $\theta(n^2)$.

Peut-on améliorer l'algorithme
avec une méthode diviser pour régner ?

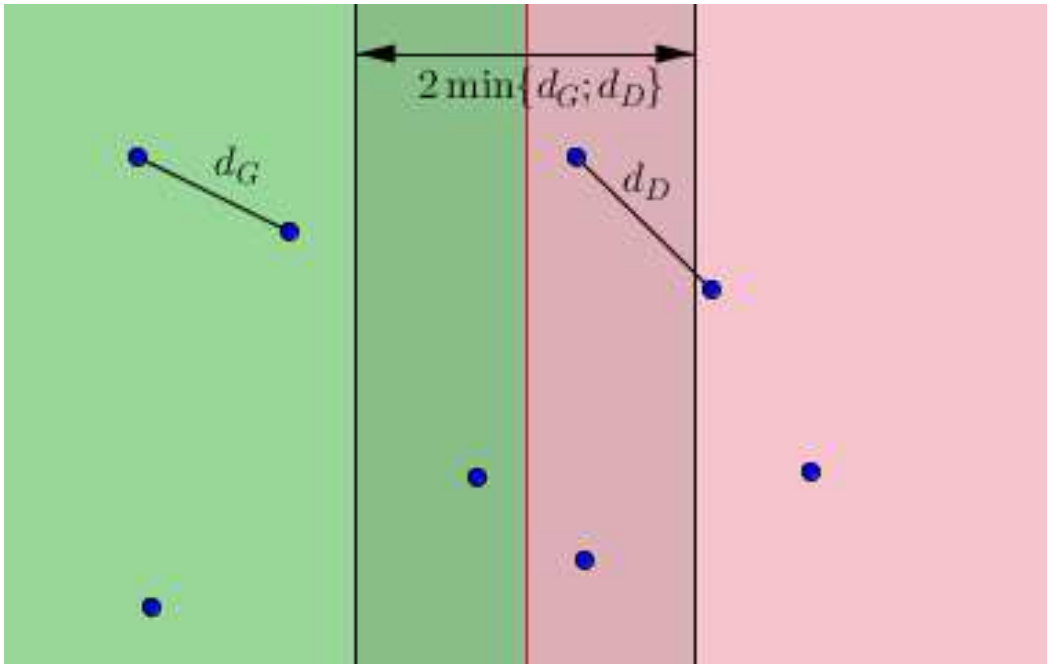
## Diviser



- Nécessité d'avoir un tableau $TX$ de points triés par abscisses croissantes
- On continue les appels récursifs avec les tableaux $TX_G$ et $TX_D$
- Lorsque qu'il y a 2 ou 3 points, on résout le problème naïvement.

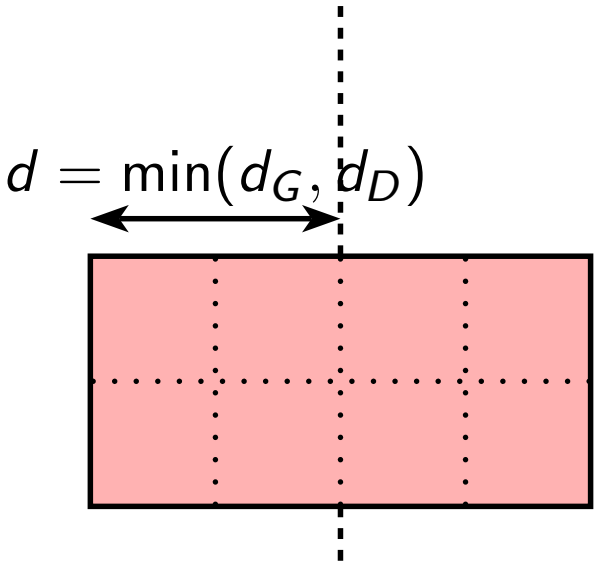


Comment fusionner les résultats obtenus ?



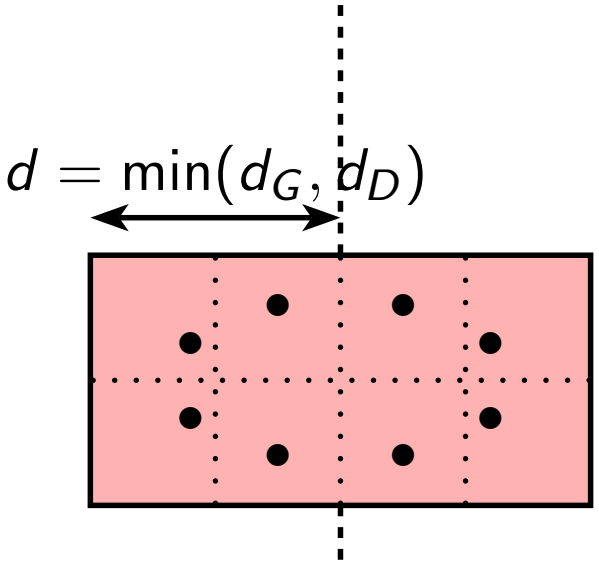

## Exercice

Pourquoi ne pas chercher en dehors de cette bande ?



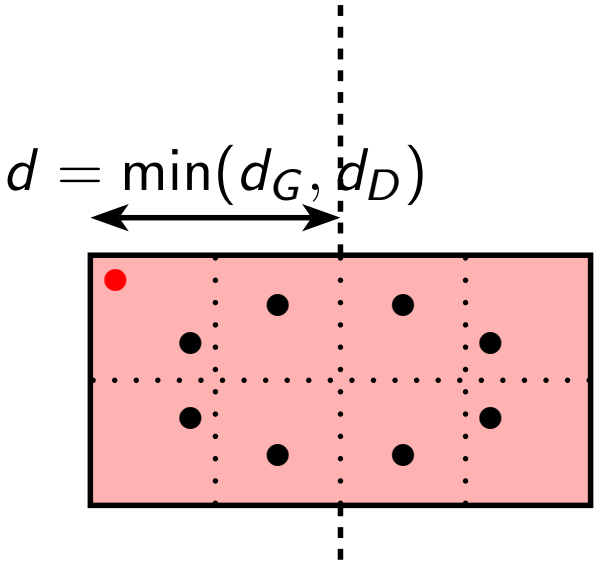

## Exercice

On pose $d = \min(d_G; d_D)$. Dans ce rectangle, centré sur la valeur médiane des abscisses, de longueur $2d$ et de largeur $d$, pourquoi ne peut-il pas y avoir plus de 8 points ?



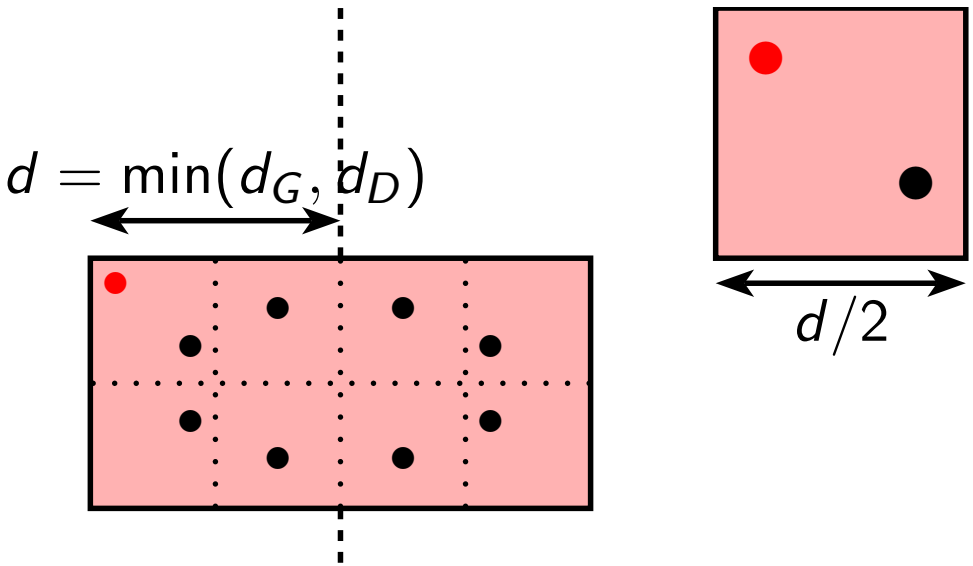

## Exercice

On pose $d = \min(d_G; d_D)$. Dans ce rectangle, centré sur la valeur médiane des abscisses, de longueur $2d$ et de largeur $d$, pourquoi ne peut-il pas y avoir plus de 8 points ?



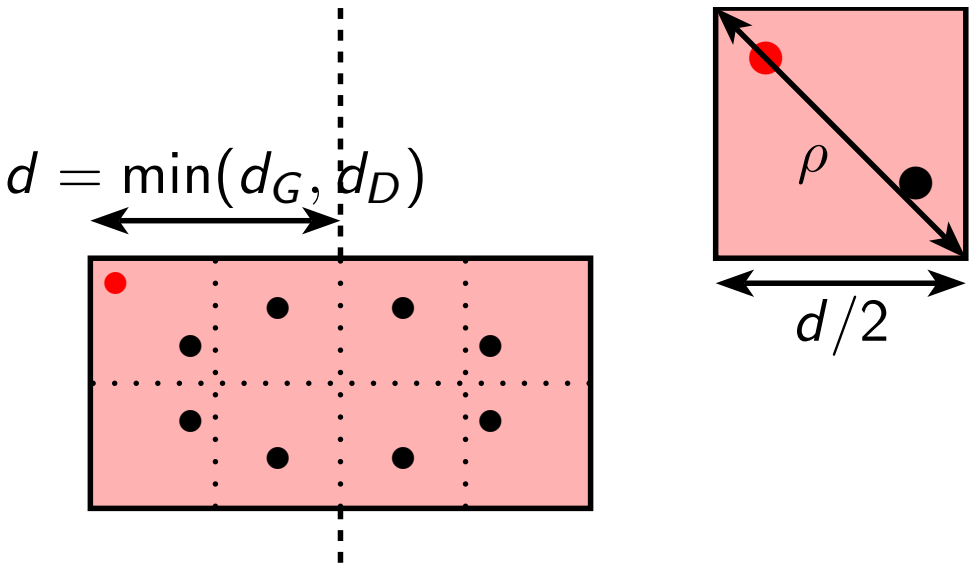

## Exercice

On pose $d = \min(d_G; d_D)$. Dans ce rectangle, centré sur la valeur médiane des abscisses, de longueur $2d$ et de largeur $d$, pourquoi ne peut-il pas y avoir plus de 8 points ?



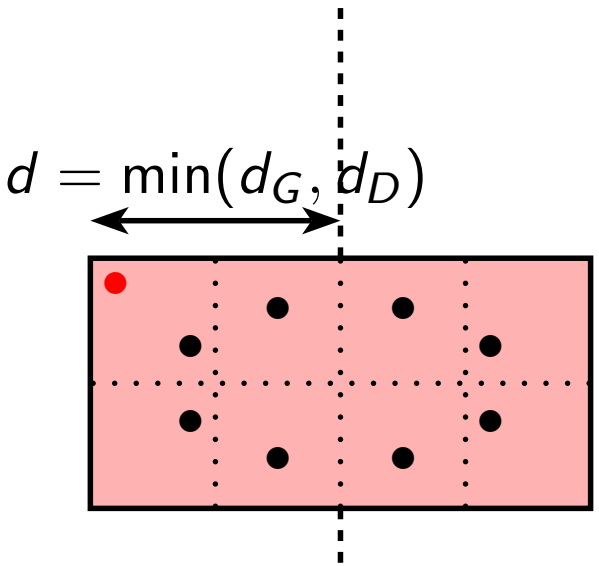

## Exercice

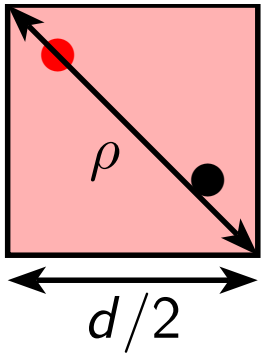
On pose $d = \min(d_G; d_D)$. Dans ce rectangle, centré sur la valeur médiane des abscisses, de longueur $2d$ et de largeur $d$, pourquoi ne peut-il pas y avoir plus de 8 points ?




## Exercice

On pose $d = \min(d_G; d_D)$. Dans ce rectangle, centré sur la valeur médiane des abscisses, de longueur $2d$ et de largeur $d$, pourquoi ne peut-il pas y avoir plus de 8 points ?

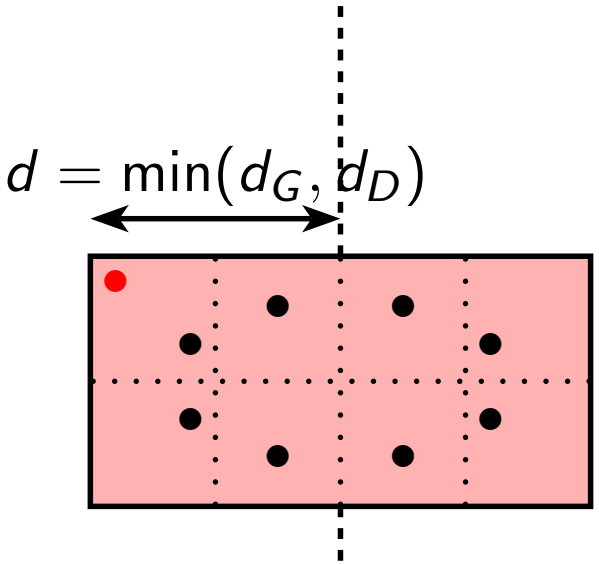


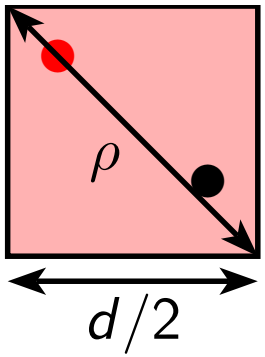




$$\rho = \frac{d}{2}\sqrt{2} < d$$

## Exercice

On pose $d = \min(d_G; d_D)$. Dans ce rectangle, centré sur la valeur médiane des abscisses, de longueur $2d$ et de largeur $d$, pourquoi ne peut-il pas y avoir plus de 8 points ?



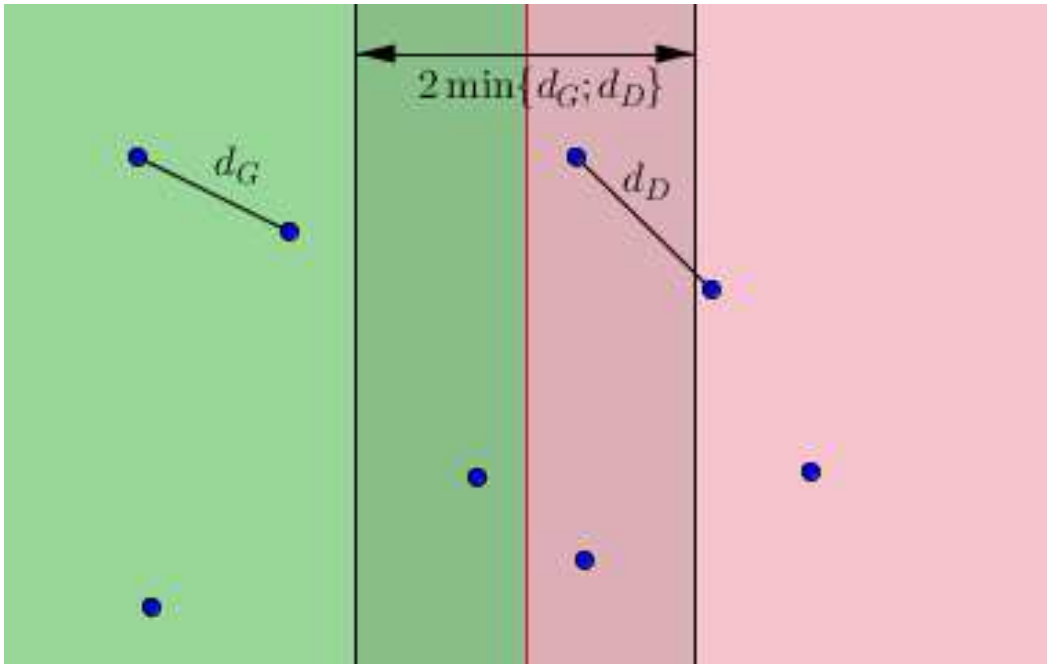




$$\rho = \frac{d}{2}\sqrt{2} < d$$

IMPOSSIBLE

## Exercice

On pose $d = \min(d_G; d_D)$. Dans ce rectangle, centré sur la valeur médiane des abscisses, de longueur $2d$ et de largeur $d$, pourquoi ne peut-il pas y avoir plus de 8 points ?




Nous avons donc besoin d'un autre tableau $TY$ contenant les points classés par ordre d'ordonnées croissantes....

En résumé, voici l'algorithme :

- Entrées : les tableaux de points $TX$, $TY$ contenant les mêmes points, l'un avec les points classés dans l'ordre croissant des abscisses, l'autre par ordre croissant des ordonnées.
- Sorties : Deux points à distance minimum et la distance minimum.

Fonction PlusProches(TX,TY)
- SI $|TX| < 4$ ALORS :
  - RETOURNER PlusProcheNaif(TX ;TY)
- SINON :
  - $(med_x; TG_X; TD_X; TG_Y; TD_Y) \longleftarrow$ DiviserPoints$(TX; TY)$
  - $(P_G0; P_G1; d_G) \longleftarrow$ PlusProches$(TG_X; TG_Y)$
  - $(P_D0; P_D1; d_D) \longleftarrow$ PlusProches$(TD_X; TD_Y)$
  - SI $d_G < d_D$ ALORS :
    - $(P_0; P_1, d) \longleftarrow (P_G0; P_G1; d_G)$
  - SINON :
    - $(P_0; P_1, d) \longleftarrow (P_D0; P_D1; d_D)$
  - $TY' \longleftarrow$ BandeVerticale$(TY; d; med_x)$
  - $(b; P'_0; P'_1; d') \longleftarrow$ DePartEtDautre$(TY'; d)$
  - SI $b$ ALORS :
    - RETOURNER $(P'_0; P'_1, d')$
  - SINON :
    - RETOURNER $(P_0; P_1, d)$

## Exercice

Quelle complexité au final ?

## Exercice

### Quelle complexité au final ?

Si on note $C(n)$ le coût pour trouver la distance minimale d'un nuage de $n$ points ($n$ pair) :

```
Fonction PlusProches(TX,TY)
    SI |TX| < 4 ALORS :
        RETOURNER PlusProcheNaif(TX ;TY)
    SINON :
        (med_x; TG_X; TD_X; TG_Y; TD_Y) ⟵ DiviserPoints(TX; TY)
        (P_G0; P_G1; d_G) ⟵ PlusProches(TG_X; TG_Y)
        (P_D0; P_D1; d_D) ⟵ PlusProches(TD_X; TD_Y)
        SI d_G < d_D ALORS :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_G0; P_G1; d_G)
        SINON :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_D0; P_D1; d_D)
        TY' ⟵ BandeVerticale(TY; d; med_x)
        (b; P'_0; P'_1; d') ⟵ DePartEtDautre(TY'; d)
        SI b ALORS :
            RETOURNER (P'_0; P'_1, d')
        SINON :
            RETOURNER (P_0; P_1, d)
```

$$C(n) =$$

## Exercice

Quelle complexité au final ?

Si on note $C(n)$ le coût pour trouver la distance minimale d'un nuage de $n$ points ($n$ pair) :

```
Fonction PlusProches(TX,TY)
    SI |TX| < 4 ALORS :
        RETOURNER PlusProcheNaif(TX ;TY)
    SINON :
        (med_x; TG_X; TD_X; TG_Y; TD_Y) ⟵ DiviserPoints(TX; TY)
        (P_G0; P_G1; d_G) ⟵ PlusProches(TG_X; TG_Y)
        (P_D0; P_D1; d_D) ⟵ PlusProches(TD_X; TD_Y)
        SI d_G < d_D ALORS :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_G0; P_G1; d_G)
        SINON :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_D0; P_D1; d_D)
        TY' ⟵ BandeVerticale(TY; d; med_x)
        (b; P'_0; P'_1; d') ⟵ DePartEtDautre(TY'; d)
        SI b ALORS :
            RETOURNER (P'_0; P'_1, d')
        SINON :
            RETOURNER (P_0; P_1, d)
```

$$C(n) = \text{DiviserPoints}$$

## Exercice

Quelle complexité au final ?

Si on note $C(n)$ le coût pour trouver la distance minimale d'un nuage de $n$ points ($n$ pair) :

Fonction PlusProches(TX,TY)
- SI $|TX| < 4$ ALORS :
  - RETOURNER PlusProcheNaif(TX ;TY)
- SINON :
  - $(med_x; TG_X; TD_X; TG_Y; TD_Y) \longleftarrow$ DiviserPoints$(TX; TY)$
  - $(P_G0; P_G1; d_G) \longleftarrow$ PlusProches$(TG_X; TG_Y)$
  - $(P_D0; P_D1; d_D) \longleftarrow$ PlusProches$(TD_X; TD_Y)$
  - SI $d_G < d_D$ ALORS :
    - $(P_0; P_1, d) \longleftarrow (P_G0; P_G1; d_G)$
  - SINON :
    - $(P_0; P_1, d) \longleftarrow (P_D0; P_D1; d_D)$
  - $TY' \longleftarrow$ BandeVerticale$(TY; d; med_x)$
  - $(b; P'_0; P'_1; d') \longleftarrow$ DePartEtDautre$(TY'; d)$
  - SI $b$ ALORS :
    - RETOURNER $(P'_0; P'_1, d')$
  - SINON :
    - RETOURNER $(P_0; P_1, d)$

$$C(n) = \begin{matrix} \text{DiviserPoints} \\ n \\ \text{PlusProches} \end{matrix}$$

## Exercice

Quelle complexité au final ?

Si on note $C(n)$ le coût pour trouver la distance minimale d'un nuage de $n$ points ($n$ pair) :

```
Fonction PlusProches(TX,TY)
    SI |TX| < 4 ALORS :
        RETOURNER PlusProcheNaif(TX ;TY)
    SINON :
        (med_x; TG_X; TD_X; TG_Y; TD_Y) ⟵ DiviserPoints(TX; TY)
        (P_G0; P_G1; d_G) ⟵ PlusProches(TG_X; TG_Y)
        (P_D0; P_D1; d_D) ⟵ PlusProches(TD_X; TD_Y)
        SI d_G < d_D ALORS :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_G0; P_G1; d_G)
        SINON :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_D0; P_D1; d_D)
        TY' ⟵ BandeVerticale(TY; d; med_x)
        (b; P'_0; P'_1; d') ⟵ DePartEtDautre(TY'; d)
        SI b ALORS :
            RETOURNER (P'_0; P'_1, d')
        SINON :
            RETOURNER (P_0; P_1, d)
```

$$C(n) = \begin{matrix} \text{DiviserPoints} \\ \text{PlusProches} \end{matrix} \begin{matrix} n \\ +2 \times C(n/2) \end{matrix}$$

## Exercice

Quelle complexité au final ?

Si on note $C(n)$ le coût pour trouver la distance minimale d'un nuage de $n$ points ($n$ pair) :

```
Fonction PlusProches(TX,TY)
    SI |TX| < 4 ALORS :
        RETOURNER PlusProcheNaif(TX ;TY)
    SINON :
        (med_x; TG_X; TD_X; TG_Y; TD_Y) ⟵ DiviserPoints(TX; TY)
        (P_G0; P_G1; d_G) ⟵ PlusProches(TG_X; TG_Y)
        (P_D0; P_D1; d_D) ⟵ PlusProches(TD_X; TD_Y)
        SI d_G < d_D ALORS :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_G0; P_G1; d_G)
        SINON :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_D0; P_D1; d_D)
        TY' ⟵ BandeVerticale(TY; d; med_x)
        (b; P'_0; P'_1; d') ⟵ DePartEtDautre(TY'; d)
        SI b ALORS :
            RETOURNER (P'_0; P'_1, d')
        SINON :
            RETOURNER (P_0; P_1, d)
```

$$
\begin{array}{rl}
 & C(n) = \\
\text{DiviserPoints} & n \\
\text{PlusProches} & +2 \times C(n/2) \\
\text{Si } d_G < d_D &
\end{array}
$$

## Exercice

Quelle complexité au final ?

Si on note $C(n)$ le coût pour trouver la distance minimale d'un nuage de $n$ points ($n$ pair) :

```
Fonction PlusProches(TX,TY)
    SI |TX| < 4 ALORS :
        RETOURNER PlusProcheNaif(TX ;TY)
    SINON :
        (med_x; TG_X; TD_X; TG_Y; TD_Y) ⟵ DiviserPoints(TX; TY)
        (P_G0; P_G1; d_G) ⟵ PlusProches(TG_X; TG_Y)
        (P_D0; P_D1; d_D) ⟵ PlusProches(TD_X; TD_Y)
        SI d_G < d_D ALORS :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_G0; P_G1; d_G)
        SINON :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_D0; P_D1; d_D)
        TY' ⟵ BandeVerticale(TY; d; med_x)
        (b; P'_0; P'_1; d') ⟵ DePartEtDautre(TY'; d)
        SI b ALORS :
            RETOURNER (P'_0; P'_1, d')
        SINON :
            RETOURNER (P_0; P_1, d)
```

$$C(n) =$$

| | |
|---|---|
| DiviserPoints | $n$ |
| PlusProches | $+2 \times C(n/2)$ |
| Si $d_G < d_D$ | $+1$ |

## Exercice

### Quelle complexité au final ?

Si on note $C(n)$ le coût pour trouver la distance minimale d'un nuage de $n$ points ($n$ pair) :

```
Fonction PlusProches(TX,TY)
    SI |TX| < 4 ALORS :
        RETOURNER PlusProcheNaif(TX ;TY)
    SINON :
        (med_x; TG_X; TD_X; TG_Y; TD_Y) ⟵ DiviserPoints(TX; TY)
        (P_G0; P_G1; d_G) ⟵ PlusProches(TG_X; TG_Y)
        (P_D0; P_D1; d_D) ⟵ PlusProches(TD_X; TD_Y)
        SI d_G < d_D ALORS :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_G0; P_G1; d_G)
        SINON :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_D0; P_D1; d_D)
        TY' ⟵ BandeVerticale(TY; d; med_x)
        (b; P'_0; P'_1; d') ⟵ DePartEtDautre(TY'; d)
        SI b ALORS :
            RETOURNER (P'_0; P'_1, d')
        SINON :
            RETOURNER (P_0; P_1, d)
```

$$
\begin{array}{rl}
 & C(n) = \\
\text{DiviserPoints} & n \\
\text{PlusProches} & +2 \times C(n/2) \\
\text{Si } d_G < d_D & +1 \\
\text{BandeVerticale} &
\end{array}
$$

## Exercice

### Quelle complexité au final ?

Si on note $C(n)$ le coût pour trouver la distance minimale d'un nuage de $n$ points ($n$ pair) :

```
Fonction PlusProches(TX,TY)
    SI |TX| < 4 ALORS :
        RETOURNER PlusProcheNaif(TX ;TY)
    SINON :
        (med_x; TG_X; TD_X; TG_Y; TD_Y) ⟵ DiviserPoints(TX; TY)
        (P_G0; P_G1; d_G) ⟵ PlusProches(TG_X; TG_Y)
        (P_D0; P_D1; d_D) ⟵ PlusProches(TD_X; TD_Y)
        SI d_G < d_D ALORS :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_G0; P_G1; d_G)
        SINON :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_D0; P_D1; d_D)
        TY' ⟵ BandeVerticale(TY; d; med_x)
        (b; P'_0; P'_1; d') ⟵ DePartEtDautre(TY'; d)
        SI b ALORS :
            RETOURNER (P'_0; P'_1, d')
        SINON :
            RETOURNER (P_0; P_1, d)
```

| | $C(n) =$ |
|---|---|
| DiviserPoints | $n$ |
| PlusProches | $+2 \times C(n/2)$ |
| Si $d_G < d_D$ | $+1$ |
| BandeVerticale | $+n$ |

## Exercice

Quelle complexité au final ?

Si on note $C(n)$ le coût pour trouver la distance minimale d'un nuage de $n$ points ($n$ pair) :

```
Fonction PlusProches(TX,TY)
    SI |TX| < 4 ALORS :
        RETOURNER PlusProcheNaif(TX ;TY)
    SINON :
        (med_x; TG_X; TD_X; TG_Y; TD_Y) ⟵ DiviserPoints(TX; TY)
        (P_G0; P_G1; d_G) ⟵ PlusProches(TG_X; TG_Y)
        (P_D0; P_D1; d_D) ⟵ PlusProches(TD_X; TD_Y)
        SI d_G < d_D ALORS :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_G0; P_G1; d_G)
        SINON :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_D0; P_D1; d_D)
        TY' ⟵ BandeVerticale(TY; d; med_x)
        (b; P'_0; P'_1; d') ⟵ DePartEtDautre(TY'; d)
        SI b ALORS :
            RETOURNER (P'_0; P'_1, d')
        SINON :
            RETOURNER (P_0; P_1, d)
```

$$
\begin{array}{rl}
 & C(n) = \\
\text{DiviserPoints} & n \\
\text{PlusProches} & +2 \times C(n/2) \\
\text{Si } d_G < d_D & +1 \\
\text{BandeVerticale} & +n \\
\text{DePartEtDautre} &
\end{array}
$$

## Exercice

### Quelle complexité au final ?

Si on note $C(n)$ le coût pour trouver la distance minimale d'un nuage de $n$ points ($n$ pair) :

```
Fonction PlusProches(TX,TY)
    SI |TX| < 4 ALORS :
        RETOURNER PlusProcheNaif(TX ;TY)
    SINON :
        (med_x; TG_X; TD_X; TG_Y; TD_Y) ⟵ DiviserPoints(TX; TY)
        (P_G0; P_G1; d_G) ⟵ PlusProches(TG_X; TG_Y)
        (P_D0; P_D1; d_D) ⟵ PlusProches(TD_X; TD_Y)
        SI d_G < d_D ALORS :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_G0; P_G1; d_G)
        SINON :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_D0; P_D1; d_D)
        TY' ⟵ BandeVerticale(TY; d; med_x)
        (b; P'_0; P'_1; d') ⟵ DePartEtDautre(TY'; d)
        SI b ALORS :
            RETOURNER (P'_0; P'_1, d')
        SINON :
            RETOURNER (P_0; P_1, d)
```

| | $C(n) =$ |
|---|---|
| DiviserPoints | $n$ |
| PlusProches | $+2 \times C(n/2)$ |
| Si $d_G < d_D$ | $+1$ |
| BandeVerticale | $+n$ |
| DePartEtDautre | $+8n$ |

## Exercice

Quelle complexité au final ?

Si on note $C(n)$ le coût pour trouver la distance minimale d'un nuage de $n$ points ($n$ pair) :

```
Fonction PlusProches(TX,TY)
    SI |TX| < 4 ALORS :
        RETOURNER PlusProcheNaif(TX ;TY)
    SINON :
        (med_x; TG_X; TD_X; TG_Y; TD_Y) ⟵ DiviserPoints(TX; TY)
        (P_G0; P_G1; d_G) ⟵ PlusProches(TG_X; TG_Y)
        (P_D0; P_D1; d_D) ⟵ PlusProches(TD_X; TD_Y)
        SI d_G < d_D ALORS :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_G0; P_G1; d_G)
        SINON :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_D0; P_D1; d_D)
        TY' ⟵ BandeVerticale(TY; d; med_x)
        (b; P'_0; P'_1; d') ⟵ DePartEtDautre(TY'; d)
        SI b ALORS :
            RETOURNER (P'_0; P'_1, d')
        SINON :
            RETOURNER (P_0; P_1, d)
```

| | $C(n) =$ |
|---|---|
| DiviserPoints | $n$ |
| PlusProches | $+2 \times C(n/2)$ |
| Si $d_G < d_D$ | $+1$ |
| BandeVerticale | $+n$ |
| DePartEtDautre | $+8n$ |
| Si $b$ | |

## Exercice

### Quelle complexité au final ?

Si on note $C(n)$ le coût pour trouver la distance minimale d'un nuage de $n$ points ($n$ pair) :

```
Fonction PlusProches(TX,TY)
    SI |TX| < 4 ALORS :
        RETOURNER PlusProcheNaif(TX ;TY)
    SINON :
        (med_x; TG_X; TD_X; TG_Y; TD_Y) ⟵ DiviserPoints(TX; TY)
        (P_G0; P_G1; d_G) ⟵ PlusProches(TG_X; TG_Y)
        (P_D0; P_D1; d_D) ⟵ PlusProches(TD_X; TD_Y)
        SI d_G < d_D ALORS :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_G0; P_G1; d_G)
        SINON :
            (P_0; P_1, d) ⟵ (P_D0; P_D1; d_D)
        TY' ⟵ BandeVerticale(TY; d; med_x)
        (b; P'_0; P'_1; d') ⟵ DePartEtDautre(TY'; d)
        SI b ALORS :
            RETOURNER (P'_0; P'_1, d')
        SINON :
            RETOURNER (P_0; P_1, d)
```

$$
\begin{array}{rl}
 & C(n) = \\
\text{DiviserPoints} & n \\
\text{PlusProches} & +2 \times C(n/2) \\
\text{Si } d_G < d_D & +1 \\
\text{BandeVerticale} & +n \\
\text{DePartEtDautre} & +8n \\
\text{Si } b & +1
\end{array}
$$

$$C(n) = 2C(n/2) + O(n)$$

$$C(n) = 2C(n/2) + O(n)$$

C'est à dire que : $\exists \gamma > 0$ tel que $C(n) \leqslant 2C(n/2) + \gamma n$

$$C(n) = 2C(n/2) + O(n)$$

C'est à dire que : $\exists \gamma > 0$ tel que $C(n) \leqslant 2C(n/2) + \gamma n$

Posons pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, $u_\ell = \dfrac{C(2^\ell)}{2^\ell}$.

$$C(n) = 2C(n/2) + O(n)$$

C'est à dire que : $\exists \gamma > 0$ tel que $C(n) \leqslant 2C(n/2) + \gamma n$

Posons pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, $u_\ell = \dfrac{C(2^\ell)}{2^\ell}$.

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_{\ell+1} = \frac{C(2^{\ell+1})}{2^{\ell+1}} \leqslant \frac{2C(2^\ell) + \gamma 2^{\ell+1}}{2^{\ell+1}} = u_\ell + \gamma$$

$$C(n) = 2C(n/2) + O(n)$$

C'est à dire que : $\exists \gamma > 0$ tel que $C(n) \leqslant 2C(n/2) + \gamma n$

Posons pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, $u_\ell = \dfrac{C(2^\ell)}{2^\ell}$.

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_{\ell+1} = \frac{C(2^{\ell+1})}{2^{\ell+1}} \leqslant \frac{2C(2^\ell) + \gamma 2^{\ell+1}}{2^{\ell+1}} = u_\ell + \gamma$$

Sommons pour $k$ allant de 1 à $\ell - 1$ :

$$\sum_{k=1}^{\ell-1} u_{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{\ell-1} (u_k + \gamma)$$

$$C(n) = 2C(n/2) + O(n)$$

C'est à dire que : $\exists \gamma > 0$ tel que $C(n) \leqslant 2C(n/2) + \gamma n$

Posons pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, $u_\ell = \dfrac{C(2^\ell)}{2^\ell}$.

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_{\ell+1} = \frac{C(2^{\ell+1})}{2^{\ell+1}} \leqslant \frac{2C(2^\ell) + \gamma 2^{\ell+1}}{2^{\ell+1}} = u_\ell + \gamma$$

Sommons pour $k$ allant de 1 à $\ell - 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\ell-1} u_{k+1} &\leqslant \sum_{k=1}^{\ell-1} \left(u_k + \gamma\right) \\ \sum_{k=2}^{\ell} u_k &\leqslant \sum_{k=1}^{\ell-1} u_k + \gamma(\ell - 1) \end{aligned}$$

$$C(n) = 2C(n/2) + O(n)$$

C'est à dire que : $\exists \gamma > 0$ tel que $C(n) \leqslant 2C(n/2) + \gamma n$

Posons pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, $u_\ell = \dfrac{C(2^\ell)}{2^\ell}$.

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_{\ell+1} = \frac{C(2^{\ell+1})}{2^{\ell+1}} \leqslant \frac{2C(2^\ell) + \gamma 2^{\ell+1}}{2^{\ell+1}} = u_\ell + \gamma$$

Sommons pour $k$ allant de 1 à $\ell - 1$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\ell-1} u_{k+1} &\leqslant \sum_{k=1}^{\ell-1} \left(u_k + \gamma\right) \\
\sum_{k=2}^{\ell} u_k &\leqslant \sum_{k=1}^{\ell-1} u_k + \gamma(\ell - 1) \\
u_\ell &\leqslant u_1 + \gamma\ell
\end{aligned}$$

$$C(n) = 2C(n/2) + O(n)$$

C'est à dire que : $\exists \gamma > 0$ tel que $C(n) \leqslant 2C(n/2) + \gamma n$

Posons pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, $u_\ell = \dfrac{C(2^\ell)}{2^\ell}$.

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_{\ell+1} = \frac{C(2^{\ell+1})}{2^{\ell+1}} \leqslant \frac{2C(2^\ell) + \gamma 2^{\ell+1}}{2^{\ell+1}} = u_\ell + \gamma$$

Sommons pour $k$ allant de 1 à $\ell - 1$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\ell-1} u_{k+1} &\leqslant \sum_{k=1}^{\ell-1} (u_k + \gamma) \\
\sum_{k=2}^{\ell} u_k &\leqslant \sum_{k=1}^{\ell-1} u_k + \gamma(\ell - 1) \\
u_\ell &\leqslant u_1 + \gamma\ell \\
u_\ell &\leqslant \gamma\ell
\end{aligned}$$

$$C(n) = 2C(n/2) + O(n)$$

C'est à dire que : $\exists \gamma > 0$ tel que $C(n) \leqslant 2C(n/2) + \gamma n$

Posons pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, $u_\ell = \dfrac{C(2^\ell)}{2^\ell}$.

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ u_{\ell+1} = \frac{C(2^{\ell+1})}{2^{\ell+1}} \leqslant \frac{2C(2^\ell) + \gamma 2^{\ell+1}}{2^{\ell+1}} = u_\ell + \gamma$$

Sommons pour $k$ allant de 1 à $\ell - 1$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\ell-1} u_{k+1} &\leqslant \sum_{k=1}^{\ell-1} (u_k + \gamma) \\
\sum_{k=2}^{\ell} u_k &\leqslant \sum_{k=1}^{\ell-1} u_k + \gamma(\ell - 1) \\
u_\ell &\leqslant u_1 + \gamma\ell \\
u_\ell &\leqslant \gamma\ell
\end{aligned}$$

On vient de montrer que $u_\ell \leqslant \gamma\ell$, c'est à dire $C(2^\ell) \leqslant \gamma\ell 2^\ell$

On vient de montrer que $u_\ell \leqslant \gamma\ell$, c'est à dire $C(2^\ell) \leqslant \gamma\ell 2^\ell$

Ou encore, si $n$ est une puissance de 2, $C(n) \leqslant \gamma n \log_2(n)$

On vient de montrer que $u_\ell \leqslant \gamma\ell$, c'est à dire $C(2^\ell) \leqslant \gamma\ell 2^\ell$

Ou encore, si $n$ est une puissance de 2, $C(n) \leqslant \gamma n \log_2(n)$

Ici encore $C(n)$ est croissante, donc on peut montrer que

$$C(n) = O(n \ln n).$$

On vient de montrer que $u_\ell \leqslant \gamma\ell$, c'est à dire $C(2^\ell) \leqslant \gamma\ell 2^\ell$

Ou encore, si $n$ est une puissance de 2, $C(n) \leqslant \gamma n \log_2(n)$

Ici encore $C(n)$ est croissante, donc on peut montrer que

$$C(n) = O(n \ln n).$$

Il ne faut pas oublier le temps pour trier les tableaux $TX$ et $TY$ en début d'algorithme, ce qui peut être fait en $n \ln n$.

On vient de montrer que $u_\ell \leqslant \gamma\ell$, c'est à dire $C(2^\ell) \leqslant \gamma\ell 2^\ell$

Ou encore, si $n$ est une puissance de 2, $C(n) \leqslant \gamma n \log_2(n)$

Ici encore $C(n)$ est croissante, donc on peut montrer que

$$C(n) = O(n \ln n).$$

Il ne faut pas oublier le temps pour trier les tableaux $TX$ et $TY$ en début d'algorithme, ce qui peut être fait en $n \ln n$.

Finalement, la complexité est en $O(n \ln n)$.

MERCI