

## DIXIÈME LEÇON

# PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

## 1 - Une approche « philosophique »...

### A Un problème historique

Alors que les êtres humains se sont intéressés à la géométrie depuis la nuit des temps, et qu'une première présentation rigoureuse ( les mathématiciens disent *axiomatique* ) en a été proposée trois siècles avant JC par le grec Euclide, il a fallu attendre le XVI<sup>ème</sup> siècles pour qu'on s'intéresse enfin aux probabilités, et encore était-ce pour aider les princes à améliorer leurs gains au jeu.

Ainsi, le Grand Duc de Toscane demanda au vénérable Galilée pourquoi il était plus difficile d'obtenir 9 que 10 au jeu de passe-dix ( jeu consistant à jeter 3 dés ), même s'il n'y a dans les deux cas que 6 combinaisons pour les obtenir.

La grande expérience du Duc en matière de jeu lui avait permis de remarquer ce phénomène, alors que théoriquement, « sur le papier », il aurait dû y avoir la même fréquence d'apparition des deux nombres, puisqu'il y a dans chaque cas 6 manières de les obtenir. Y aurait-il plusieurs réalités ?

### B Qu'est-ce que le hasard ?

Parmi toutes les définitions possibles, nous en retiendrons deux qui ont influencé la théorie des probabilités :

- ▷ pour certains, tout a une cause, et le hasard n'est que le reflet de l'ignorance que nous avons des lois de la Nature. Cet esprit souffla particulièrement au XVIII<sup>ème</sup> siècle au moment où Laplace posa les bases d'une première théorisation des probabilités. C'est dans cet esprit que vous avez étudié les probabilités en classe de Première. Les probabilités sont alors déterminées *a priori*, par des considérations non expérimentales. Par exemple, un dé a six faces, donc, on peut poser d'avance que l'événement « obtenir 5 » a une probabilité de  $1/6$ . Cette symétrie, cette « géométrie du hasard » selon les termes de Pascal, permet de calculer sans ressentir le besoin de recourir à l'expérience. Elle implique la notion centrale en Première d'**équiprobabilité** : une probabilité est égale au rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.

Cette conception peut apparaître assez naïve : il est illusoire de penser qu'un dé puisse être parfaitement équilibré, mais doit-on être gêné pour autant ? Nous en reparlerons un peu plus loin.

- ▷ pour d'autres, le hasard constitue notre univers. La théorie du chaos mise en forme par René Thom en 1955 montre en effet que dans certaines situations, on aura beau observer un phénomène pendant un temps très long, on ne pourra prévoir son évolution. De même en physique quantique, la connaissance du passé et du présent ne permettent que d'obtenir une estimation des états possibles futurs. Les probabilités ne peuvent alors être calculées *a priori*.

Cet antagonisme peut se résumer en considérant l'expérience très simple suivante : on jette une punaise en l'air ; va-t-elle retomber sur la pointe ou sur la tête ?

Pour les « Laplaciens », il existe un nombre parfaitement déterminé, mais pas encore calculable *a priori*. On peut néanmoins l'approcher par une série de mesures expérimentales.

Pour d'autres, c'est prêter à la Nature des intentions mathématiques, alors que cette interprétation chiffrée n'est qu'œuvre humaine.

Qui a raison, qui a tort, le débat est encore ouvert. Nous pouvons néanmoins réunir deux grands groupes. Ceux qui prônent une étude expérimentale des probabilités ne sont en fait pas très éloignés des « Laplaciens », car l'idée centrale contenue dans la Loi des grands nombres ( en gros, la limite<sup>1</sup> des fréquences observées est égale à la probabilité : plus on fait de mesures, plus la fréquence se rapproche de la probabilité ) est basée sur la définition Laplacienne de la probabilité : cas favorables sur cas possibles.

Inversement, la géométrie du hasard des Laplaciens ( 1 chance sur 6 d'obtenir chacune des faces d'un dé ) repose sur la parfaite symétrie du dé. Mais un dé peut-il être parfaitement symétrique ? Pour le vérifier, il faudrait faire un grand nombre d'expériences...

Bref, au lieu de s'opposer, ces deux visions se complètent. Mais il faut les avoir en tête : tout n'est pas équiprobable ( voir le jeu du passe-dix ) et la probabilité ne peut se réduire à la limite des fréquences, ne serait-ce que dans le cas d'une expérience qui ne peut se répéter : quelle est la probabilité de survivre à une guerre nucléaire ? Il semble difficile d'imaginer une série d'expériences pour s'approcher de cette probabilité...

Mêmes si elles peuvent apparaître antagonistes, ces deux notions ont en commun de postuler que l'issue de l'expérience ( le jeter d'un dé ) est indépendant de l'observateur. Ceci peut ne plus être vrai dans certains domaines, comme par exemple l'économie. Comme le disait John Stuart Mill : *we must remember that the probability of an event is not a quality itself, but a mere name for the degree of ground which we, or someone else, have for expecting it.* Faute de données sûres, en économie on estime a priori les probabilités de certains événements élémentaires, puis on utilise ensuite des théorèmes abstraits issus des mathématiques.

### • Oublions tout ce que nous venons de dire !

A-t-on besoin de savoir tout ça pour réussir au Bac ? Par exemple, depuis votre tendre enfance, vous calculez avec les nombres entiers sans connaître les axiomes de Peano, vous travaillez en géométrie euclidienne même si elle ne correspond pas à la réalité : avez-vous déjà rencontré un véritable triangle rectangle ? Et pourtant vous arrivez quand même à démontrer le théorème de Pythagore.

Mais le débat est plus passionné au sujet des probabilités car il a fallu attendre 1933 et le Russe Kolmogorov pour enfin les axiomatiser, alors que Euclide avait fait cela pour la géométrie 2300 ans plus tôt...

C'est ce sujet encore brûlant que nous allons explorer cette année à travers quelques chapitres qui sauront, je n'en doute pas, vous passionner !

## 2 - Une première approche de la notion de probabilité conditionnelle

### A Description statistique

Une enquête est effectuée auprès des 100 élèves d'un lycée syldave concernant le temps de travail hebdomadaire et le sexe des élèves.

On a obtenu le tableau suivant

travail \ sexe	< 5 minutes	≥ 5 minutes
filles	20	15
garçons	60	5

<sup>1</sup>il s'agit de la limite stochastique qui n'a rien à voir avec les limites étudiées au lycée...

Soit  $T$  l'ensemble de ceux qui travaillent plus de 5 minutes par semaine et  $G$  l'ensemble des garçons. Alors on notera  $\bar{T}$  le complémentaire de  $T$  dans la population totale du lycée, et  $\bar{G}$  celui de  $G$ , c'est à dire l'ensemble des filles.

Alors on peut construire le tableau des fréquences correspondant

sexe \ travail	$\bar{T}$	$T$	fréquence par sexe
$\bar{G}$	20%	15%	35%
$G$	60%	5%	65%
fréquence par temps de travail	80%	20%	100%

## B Exemple de modélisation probabiliste à partir d'une situation statistique

Une situation probabiliste n'existe que s'il y a une expérience (à issue) aléatoire. Il faut pour cela introduire par exemple l'expérience habituelle « on prélève au hasard un élève du lycée syldave ». L'ensemble des issues de cette expérience est appelé mathématiquement l'**univers**, souvent noté  $\Omega$  : c'est ici l'ensemble des 100 élèves du lycée.

Les parties  $T$  et  $G$  de  $\Omega$  sont des **événements** qui seront décrits à l'aide de phrase entre guillemets. Par exemple,  $G$  est l'événement « l'élève syldave prélevé est un garçon ».

On suppose les élèves syldaves indiscernables à la vue, l'ouïe, le goût, le toucher et l'odorat : cette condition assure l'**équiprobabilité** vue en Première.

Ainsi, la probabilité que l'élève prélevé travaille plus de 5 minutes vaut  $\mathbb{P}(T) = \frac{20}{100}$ , la probabilité pour que ce soit un garçon vaut  $\mathbb{P}(G) = \frac{65}{100}$  et la probabilité pour que l'élève prélevé soit un garçon qui travaille plus de 5 minutes vaut  $\mathbb{P}(G \cap T) = \frac{5}{100}$

Maintenant, **parmi les garçons**, on en choisit un au hasard. L'univers a donc changé, mais pas les propriétés du tirage, ce qui assure encore l'équiprobabilité.

La probabilité pour que ce garçon travaille plus de 5 minutes vaut  $\frac{5}{65} = \frac{1}{13}$ .

On dit que c'est la **probabilité conditionnelle de  $T$  sachant  $G$**  qu'on note  $\mathbb{P}_G(T)$ .

On constate ici que  $\mathbb{P}_G(T) = \frac{5}{65} = \frac{5/100}{65/100} = \frac{\mathbb{P}(T \cap G)}{\mathbb{P}(G)}$ . Or ce résultat est totalement indépendant des données numériques et ne dépend pas de l'équiprobabilité, donc on l'adoptera comme définition.

## 3 - Qu'est-ce qu'une probabilité ?

Pour bien comprendre de quoi nous parlons, il vaut mieux savoir de quoi nous parlons (...c'est profond!). Vous avez découvert l'année dernière les probabilités dans un cas bien particulier : vous les définissiez comme le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles. Cette manière de définir les probabilités est étroitement liée d'une part au fait que l'univers soit un ensemble fini et d'autre part au fait que chaque événement élémentaire a la même probabilité (cas d'*équiprobabilité*). Nous en reparlerons plus en détail au moment de l'étude des lois continues, mais autant avoir tout de suite une définition du concept de probabilité applicable dans un cadre général.

### Définition X-1

Notons  $\Omega$  l'ensemble des issues possibles d'une expérience (l'univers).

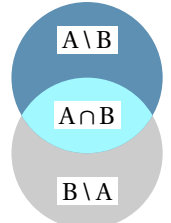
On appelle probabilité sur  $\Omega$  toute « transformation »  $p$  allant de l'ensemble des « parties » de  $\Omega$  dans  $[0, 1]$  et vérifiant  $p(\Omega) = 1$  et  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$  pour toute « partie »  $A$  et  $B$  de  $\Omega$  disjointes.

Vous vérifierez qu'à partir de cette définition, on obtient les propriétés usuelles

$$p(\emptyset) = 0, \quad p(\bar{A}) = 1 - p(A), \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Pour la dernière propriété, je vous donne un petit coup de pouce : il faut découper notre réunion en ensembles disjoints en écrivant par exemple que

- ▷  $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$
- ▷  $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$
- ▷  $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$



Retenez donc que les probabilités, ce n'est pas du « bidouillage », qu'on utilise des définitions, des théorèmes, et donc des démonstrations comme par exemple vous le faites depuis longtemps en géométrie.

⚠️ Faites bien attention maintenant à ne pas confondre univers fini et équiprobabilité. Considérez par exemple la situation suivante : on sonne à votre porte. Quelle est la probabilité pour que ce soit Monica Bellucci ( ou Quasimodo ) qui vienne vous demander en mariage ? L'univers ne contient que deux événements élémentaires : ou bien c'est Monica ou bien ce n'est pas Monica. Le rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles est donc de  $1/2$ , pourtant...

## 4 - Un exemple pour mettre en pratique

Considérons l'expérience simplissime consistant à lancer deux fois un dé à six faces. L'univers  $\Omega$  est donc constitué de l'ensemble des couples  $(i, j)$ , avec  $i$  et  $j$  appartenant à l'ensemble  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$  : il y a donc 36 éléments dans  $\Omega$ . Intéressons nous à la somme des deux chiffres et soit  $A$  l'événement « le total fait neuf ».

$$A = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$$

donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Soit  $B$  l'événement : « on obtient 3 au premier lancer », alors

$$B = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$$

donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Jusqu'ici, tout roule. Posons-nous maintenant le problème suivant : sachant que  $B$  est réalisé, i.e. que l'on obtient 3 au premier lancer, quelle est la probabilité que le total fasse 9 ? On ne considère plus tous les éléments de  $\Omega$ . Il semble alors nécessaire de définir un nouvel univers (notre nouvel ensemble des possibles) :

$$\Omega' = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\} = \Omega \cap B$$

Puisque l'univers change, la probabilité aussi. L'événement  $A'$  « le total fait neuf » dans ce nouveau modèle s'écrit

$$A' = \{(3, 6)\} = A \cap B$$

et donc

$$\mathbb{P}'(A') = \frac{1}{6} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de } B} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

On retrouve notre formule

**Définition X-2**

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé muni d'une probabilité  $\mathbb{P}$ , avec  $\mathbb{P}(B) \neq 0$ . **La probabilité de A sachant B** est définie par

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

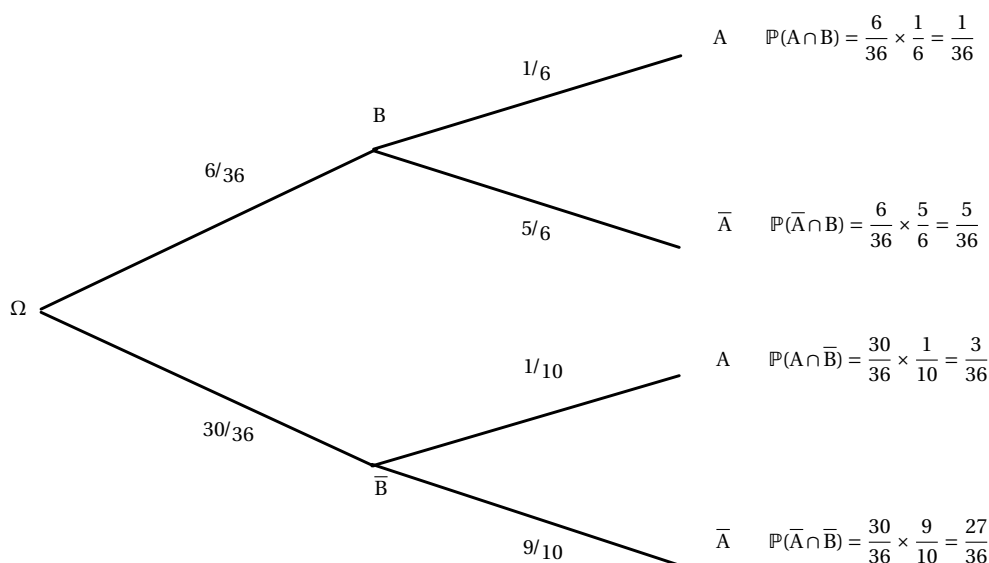
Vous pourrez vérifier pour votre confort intellectuel, bien que ce ne soit pas explicitement au programme, que l'application  $\mathbb{P}_B$  est bien une probabilité, qu'on appellera **probabilité conditionnelle sachant B**.

Essayez de vous débrouiller tout(e) seul(e) avec la situation suivante : une boîte contient 10 vipères, 5 mygales et 15 piranhas super mutants de la mort. Un animal est sorti du sac au hasard et on constate que ce n'est pas une vipère. Quelle est la probabilité que la main de l'expérimentateur finisse en amuse-gueule pour un piranhas super mutant de la mort ?

## 5 - Arbre pondéré

On peut répondre aux mêmes questions à l'aide d'un arbre *pondéré*, c'est à dire un arbre dont chaque branche est marquée de la probabilité (du *poids*) correspondant.

Alors la somme des probabilités de chaque « ramification » est égale à 1.



On pourra retenir la « règle des singes » : la probabilité de l'événement « en bout de branche » est égale au produit des probabilités « le long de la branche ».

Cette utilisation des arbres est pratique pour découvrir les probabilités dans des cas simples, mais il faut savoir qu'il faudra bien un jour les laisser de côté quand les situations deviendront plus complexes et abstraites et s'en remettre à des démonstrations classiques comme celles de géométrie, d'algèbre ou d'analyse.

## 6 - Formule des probabilités totales

Si on découpe notre univers  $\Omega$  en morceaux disjoints  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , on dit que  $A_1, A_2, \dots, A_n$  réalise **une partition** de  $\Omega$ . Par exemple, séparer une classe en un groupe fille et un groupe garçon permet de réaliser une partition de la classe. Séparer une classe en un groupe fille, un groupe garçon et un groupe d'abonnés au chasseur syldave ne permet pas de réaliser une partition car certains élèves peuvent appartenir à deux groupes en même temps. Enfin séparer une classe en un groupe de porteurs de sandales avec chaussettes et un groupe d'imitateurs du Schblurb syldave ne permet pas de réaliser une partition car certains élèves ne sont ni dans l'un ni dans l'autre groupe.

### Propriété X-1

Supposons donc qu'il existe une partition  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de  $\Omega$ , alors

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$$

Cette union étant disjointe, on a donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \dots + \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

Pour illustrer ce résultat, reprenons l'arbre du paragraphe E. Comme  $B$  et  $\bar{B}$  réalisent une partition évidente de l'univers, nous obtenons, en appliquant la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} = \frac{1}{9}$$

## 7 - Retournement d'un arbre

Simplet, Goldorak et Monica Bellucci reviennent de la forêt avec trois paniers contenant respectivement 1, 2 et 3 champignons. Dans chaque panier, il y a un champignon vénéneux.

On choisit un des trois paniers au hasard, et dans ce panier on goûte un des champignon choisi lui aussi au hasard. Quelle est la probabilité de se tordre de douleur puis de succomber dans d'atroces souffrances quelques minutes après ?

Un élève syldave qui passait par là a choisi un panier au hasard puis un champignon dans ce panier. On constate qu'il se tord de douleur puis succombe dans d'atroces souffrances : quelle est la probabilité qu'il ait goûté un champignon venant du panier de Monica Bellucci ?

Si l'utilisation d'un arbre pondéré va s'avérer utile pour résoudre la première partie du problème, il faudra raisonner plus algébriquement pour la deuxième en utilisant la définition des probabilités conditionnelles et la formule des probabilités totales.

On obtiendra alors un arbre retourné, et un peu bizarre chronologiquement parlant, puisqu'il commencera par les conséquences avant d'en venir aux causes.

## 8 - Indépendance

La notion d'événements indépendants est l'une des difficultés du calcul des probabilités. Comme souvent, cette notion purement mathématique renvoie, par son appellation, à une notion intuitive utilisée dans le langage courant. Il faut

bien garder en mémoire que le mot du vocabulaire courant est souvent un « faux ami ». On aurait aussi bien pu parler de *szjwrtrtrpgklance*, mais cela aurait été plus difficile à prononcer. Donnons tout d'abord sa définition.

### Définition X-3

Les événements A et B sont dits **indépendants** si  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

Ainsi, dans notre exemple des dés, on a  $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{9} \times \frac{6}{36} = \frac{1}{54} \neq \mathbb{P}(A \cap B)$ , donc la somme des faces issues des deux lancers n'est pas indépendante du premier, ce qui est rassurant.

Cette notion est purement abstraite et ne renvoie qu'à des propriétés mathématiques dont la principale est

### Propriété X-2

Soient A et B deux événements tels que  $\mathbb{P}(B) \neq 0$ . Les événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$$

On peut faire dire ce que l'on veut à des probabilités selon le modèle choisi.

Supposons que sur un groupe de 100 personnes, 20 portent des sous-vêtements en polystyrène expansé, 50 se curent la narine droite avec l'index gauche et 10 font les deux à la fois. On met ces 100 personnes dans une boîte et on en tire une au hasard. Vérifiez que les événements « la personne tirée porte des sous-vêtements en polystyrène expansé » et « la personne tirée se cure la narine droite avec l'index gauche » sont indépendants.

Étudiez le même problème en considérant cette fois-ci que 15 personnes se curent la narine droite avec l'index gauche (pourquoi pas).

Retenez que, de façon générale, la définition probabiliste de l'indépendance est plus large que la notion intuitive.

Veillez également à ne pas confondre événements *indépendants* et événements *incompatibles*. Montrez d'ailleurs que deux événements incompatibles de probabilité non nulle ne sont jamais indépendants.

La seule idée à retenir est que, si A et B sont indépendants, **avoir observé la réalisation de A ne modifie pas la probabilité d'une éventuelle réalisation de B.**

Ainsi, en supposant que la Française des Jeux n'utilise pas de boules truquées, on peut considérer que deux tirages successifs du loto sont indépendants.

## 9 - Quelques exercices

### A Pour s'amuser...

#### Exercice 1

Pour réussir une carrière politique en Corrèze, il faut une implantation locale. Dans cette perspective, un jeune énarque décide d'acquérir un château corrézien. Pour se faire connaître, il hante les commices agricoles du département. Il a ainsi deux chances sur trois d'être élu député. Si, par dessus le marché, il touche le derrière des vaches, cette probabilité passe à trois chances sur quatre. Il y a trois chances sur cinq pour que, son conseiller en communication lui ayant refilé le tuyau, il touche le derrière des vaches.

1. Calculez la probabilité pour qu'il soit élu député.

Réponse :  $43/60$

2. Il est député. Calculez la probabilité pour qu'il ait touché le derrière des vaches.

Réponse :  $27/43$

#### Exercice 2

Marcel est distrait. Quand il part travailler, il oublie parfois de s'habiller et prend le tramway entièrement dévêtu. Quand il a voyagé la veille nu, il voyage nu une fois sur cinq le jour même ; sinon, une fois sur deux.

On note  $N_n$  l'événement « il voyage le  $n^{\text{ième}}$  jour nu » et  $p_n$  sa probabilité.

1. Exprimez  $p_{n+1}$  en fonction de  $p_n$ .

Réponse :  $p_{n+1} = 1/2 - 3p_n/10$

2. On pose  $u_n = p_n - 5/13$

- a) Exprimez  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ , puis de  $u_1$  et  $n$ .

Réponse :  $u_n = u_1(-3/10)^{n-1}$

- b) Exprimez alors  $p_n$  en fonction de  $n$ .

- c) Montrez que la suite  $(p_n)$  est convergente et calculez sa limite.

Réponse :  $5/13$

#### Exercice 3

1. Des études morphologiques de la Vénus de Milo montrent qu'il y a cinq chances sur sept pour qu'elle soit droitère et deux chances sur sept pour qu'elle soit gauchère. Si elle est droitère, il y a trois chances sur cinq pour qu'elle épluche des carottes et deux chances sur cinq pour qu'elle dénoyaute des olives. Si elle est gauchère, il y a une chance sur deux pour qu'elle épluche des carottes et une chance sur deux pour qu'elle dénoyaute des olives.

Calculez la probabilité pour qu'elle dénoyaute des olives.

Réponse :  $3/7$

2. Les noyaux trouvés sur le site archéologique de la statue permettent d'affirmer sans hésiter qu'elle dénoyaute des olives.

Calculez la probabilité pour qu'elle soit gauchère.

Réponse :  $1/3$



### Exercice 4

Rastatopoulos, célèbre poète grec du XX<sup>e</sup> siècle avant GC, nous rapporte l'anecdote suivante.

La Vénus de Milo rangeait ses olives dans trois amphores. Dans la première, il y avait 30 olives vertes et 20 olives noires. Les deux autres amphores contenaient, l'une quatre olives vertes (Rastatopoulos ne sait plus laquelle), l'autre quatre olives noires (Rastatopoulos ignore évidemment de quelle amphore il s'agit).

Un jour d'éclipse totale du soleil, la Vénus de Milo prend, au hasard, une olive de la première amphore, puis la place dans une des deux autres amphores. Elle prend ensuite dans celle-ci une olive au hasard et le soleil réapparaît : l'olive est verte.

Calculez la probabilité pour que la dernière amphore visitée contienne plusieurs olives vertes.

On pourra considérer les événements suivants

- $V_1$  : « la première olive est verte »
- $A$  : « la deuxième amphore contenait les quatre olives vertes »
- $V_2$  : « la deuxième olive est verte »

Réponse : 23/26

## B Passons aux choses sérieuses : les probas au Bac

### Exercice 5

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

- si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).

On définit les événements suivants :

$D_1$  : « le dé indique 1 »       $D_2$  : « le dé indique 2 »

$D_3$  : « le dé indique 3 »       $G$  : « la partie est gagnée ».

A et B étant deux événements tels que  $p(A) \neq 0$ , on note  $p_A(B)$  la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. a) Déterminer les probabilités  $p_{D_1}(G)$ ,  $p_{D_2}(G)$ , et  $p_{D_3}(G)$

b) Montrer alors que  $p(G) = \frac{23}{180}$ .

2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

## Exercice 6

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant à la réponse choisie.

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.

40 % des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français.

Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

- a. 0,4      b. 0,75      c.  $\frac{1}{150}$

2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

- a. 0,3      b. 0,8      c. 0,4

3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est

- a. 1,15      b. 0,4      c. 0,3

4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

- a. 0,9      b. 0,7      c. 0,475

5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :

- a.  $\frac{4}{150}$       b.  $\frac{12}{19}$       c. 0,3

6. Le lecteur est venu 3 fois à la bibliothèque ; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

- a.  $1 - (0,25)^3$       b.  $3 \times 0,75$       c.  $0,75 \times (0,25)^3$

## Exercice 7

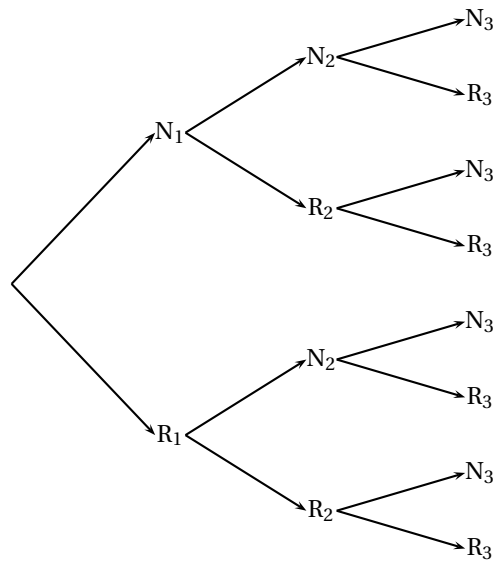
On considère trois urnes  $U_1$ ,  $U_2$ , et  $U_3$ .

L'urne  $U_1$  contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne  $U_2$  contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne  $U_3$  contient trois boules noires et quatre boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de  $U_1$  et une boule de  $U_2$ , à les mettre dans  $U_3$ , puis à tirer au hasard une boule de  $U_3$ .

Pour  $i$  prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par  $N_i$ , (respectivement  $R_i$ ) l'évènement « on tire une boule noire de l'urne  $U_i$  » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne  $U_i$  »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. a) Calculer la probabilité des évènements  $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ , et  $N_1 \cap R_2 \cap N_3$ .  
 b) En déduire la probabilité de l'évènement  $N_1 \cap N_3$ .  
 c) Calculer de façon analogue la probabilité de l'évènement  $R_1 \cap N_3$ .
3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'évènement  $N_3$ .
4. Les évènements  $N_1$  et  $N_3$  sont-ils indépendants?
5. Sachant que la boule tirée dans  $U_3$  est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de  $U_1$  soit rouge?

 **Exercice 8**

On note  $p_A(B)$  la probabilité conditionnelle de l'évènement  $B$  sachant que l'évènement  $A$  est réalisé.

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.  
 On note  $A_0$  l'évènement : « on n'a obtenu aucune boule noire » ;  
 On note  $A_1$  l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire » ;  
 On note  $A_2$  l'évènement : « on a obtenu deux boules noires ».  
 Calculer les probabilités de  $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$ .
2. Après ce premier tirage, il reste donc 4 boules dans l'urne.  
 On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.  
 On note  $B_0$  l'évènement : « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n° 2 »  
 On note  $B_1$  l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire au tirage n° 2 »  
 On note  $B_2$  l'évènement : « on a obtenu deux boules noires au tirage n° 2 »
  - a) Calculer  $p_{A_0}(B_0)$ ,  $p_{A_1}(B_0)$  et  $p_{A_2}(B_0)$ .
  - b) En déduire  $p(B_0)$ .
  - c) Calculer  $p(B_1)$  et  $p(B_2)$ .
  - d) On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier?
3. On considère l'évènement  $R$  : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'urne ».  
 Montrer que  $p(R) = \frac{1}{3}$ .

### Exercice 9

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  contenant chacune  $k$  boules, où  $k$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans l'urne  $U_1$ , deux boules noires dans l'urne  $U_2$  et une boule noire dans l'urne  $U_3$ , et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la façon suivante :

le joueur lance le dé,

- s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne  $U_1$ , note sa couleur et la remet dans l'urne  $U_1$  ;
- s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne  $U_2$ , note sa couleur et la remet dans l'urne  $U_2$  ;
- si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne  $U_3$ , note sa couleur et la remet dans l'urne  $U_3$ .

On désigne par A, B, C, et N les évènements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1 » ;

B : « Le dé amène un multiple de trois » ;

C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni le 1 ni un multiple de trois » ;

N : « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

a) Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à  $\frac{5}{3k}$ .

b) Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

c) Déterminer  $k$  pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à  $\frac{1}{2}$ .

d) Déterminer  $k$  pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à  $\frac{1}{30}$ .

2. Dans cette question,  $k$  est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à  $\frac{1}{30}$ .

Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.

Calculer, sous forme exacte puis arrondie à  $10^{-3}$ , la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

### Exercice 10

1. Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.

On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté  $a$ , porté sur le jeton, puis on remet le jeton tiré dans l'urne.

On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note  $b$  le numéro du jeton tiré.

On note  $P(a, b) = a(1 + b) - 5 + b(1 - a)$

Montrez que la probabilité que  $P(a, b)$  soit nul est égale à  $1/4$ .

2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.

Si A obtient un  $P(a, b)$  nul et B un  $P(a, b)$  non nul, A est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.

Si A obtient un  $P(a, b)$  non nul et B un  $P(a, b)$  nul, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.

Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.

Pour tout entier  $n$ , on désigne par :

- $A_n$  l'événement : « A gagne la  $n^{\text{ème}}$  partie »
- $B_n$  l'événement : « B gagne la  $n^{\text{ème}}$  partie »
- $C_n$  l'événement : « le jeu continue après la  $n^{\text{ème}}$  partie »

- a) Calculez les probabilités  $p(A_1)$ ,  $p(B_1)$  et  $p(C_1)$ .
- b) Exprimez  $p(C_{n+1})$  en fonction de  $p(C_n)$  et montrez que

$$p(C_n) = \left(\frac{5}{8}\right)^n$$

- c) Exprimez  $p(A_{n+1})$  en fonction de  $p(C_n)$  et montrez que

$$p(A_n) = \frac{3}{16} \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$$

3. a) Déterminez la limite de  $p(A_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- b) Déterminez le plus petit entier  $n$  tel que  $p(A_n)$  soit inférieur ou égal à 0,01.



### Exercice 11

*Une variante de l'exercice précédent utilisant le calcul intégral*

1. Le but de cette question est de déterminer la probabilité que la somme de deux nombres choisis au hasard dans l'intervalle  $[0, 1]$  ne dépasse pas 1 et que le produit fasse au plus  $2/9$ .
  - a) Dans un repère orthonormé d'unité 10cm, construisez la droite (D) d'équation  $y = -x + 1$  et la courbe (C) d'équation  $y = \frac{2}{9x}$ .
  - b) Hachurez la partie du plan  $\mathcal{E} = \{x \in [0, 1], y \in [0, 1] \mid x + y \leq 1 \text{ et } xy \leq 2/9\}$ .
  - c) Déterminez les coordonnées des points d'intersection de (D) et (C).
  - d) Montrez que l'aire  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{E}$  vaut  $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} \ln 2$  u.a.
  - e) En remarquant que la probabilité  $p$  cherchée vaut  $\frac{\mathcal{A}}{\text{aire du carré unité}}$ , calculez  $p$ . Cette probabilité dépend-elle de l'unité choisie?
2. Jouons : on choisit au hasard et successivement trois couples de nombres compris entre 0 et 1. On gagne lorsque deux au moins des couples satisfont la condition de la question 1).  
Calculez la probabilité  $\pi$  de gagner une partie en fonction de  $p$ .

3. Deux personnes A et B jouent à ce jeu.

Si A gagne une partie et B perd, A est déclaré vainqueur.

Si A perd une partie et B gagne, B est déclaré vainqueur.

Dans les autres cas, ils recommencent à jouer.

On note

$A_n$  l'événement : « A est déclaré vainqueur après la  $n^{\text{ème}}$  partie ».

$B_n$  l'événement : « B est déclaré vainqueur après la  $n^{\text{ème}}$  partie ».

$C_n$  l'événement : « le jeu continue après la  $n^{\text{ème}}$  partie ».

- a) Calculez  $p(A_1)$ ,  $p(B_1)$  et  $p(C_1)$ .
- b) Exprimez  $p(C_{n+1})$  en fonction de  $p(C_n)$ .
- c) Déduisez-en que  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique et exprimez  $p(C_n)$  en fonction de  $n$  et  $p(C_1)$ .  
Donnez une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $p$  puis de  $\pi$ . Calculez alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n$ .
- d) Exprimez  $p(A_{n+1})$  en fonction de  $p(C_n)$  et déduisez-en  $p(A_n)$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 12

Amélie est en vacances dans une très grande métropole. Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de nombreux feux tricolores.

Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on note  $E_n$  l'événement : « Amélie est arrêtée par le  $n^{\text{ème}}$  feu rouge ou orange » et  $\overline{E}_n$  l'événement contraire (le feu orange est considéré comme un feu rouge).

Soit  $p_n$  la probabilité de  $E_n$  et  $q_n$  celle de  $\overline{E}_n$ . La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut  $1/8$ .

On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées

- la probabilité que le  $(n+1)^{\text{ème}}$  feu tricolore soit rouge ou orange, si le  $n^{\text{ème}}$  feu est rouge ou orange, vaut  $1/20$ .
- la probabilité que le  $(n+1)^{\text{ème}}$  feu tricolore soit rouge ou orange, si le  $n^{\text{ème}}$  feu est vert, vaut  $9/20$ .

1. On s'intéresse tout d'abord aux deux premiers feux tricolores. Complétez un arbre pondéré rendant compte de la situation.
2. On se place maintenant dans le cas général.
  - a) Donnez les probabilités conditionnelles  $p_{E_n}(E_{n+1})$  et  $p_{\overline{E}_n}(E_{n+1})$ .
  - b) En remarquant que  $E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup (E_{n+1} \cap \overline{E}_n)$ , montrez que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}q_n$$

- c) Déduisez-en l'expression de  $p_{n+1}$  en fonction de  $p_n$ .
3. Soit  $(u_n)$  la suite de nombres réels définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = 28p_n - 9$ .
  - a) Montrez que  $(u_n)$  est géométrique et déterminez sa raison.
  - b) Exprimez  $u_n$  puis  $p_n$  en fonction de  $n$ .
  - c) Déterminez la limite, si elle existe, de  $p_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Interprétez ce résultat.

### Exercice 13

On considère l'ensemble  $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

Avec deux chiffres distincts  $x$  et  $y$  de  $E$  on crée un unique domino simple noté indifféremment  $[x, y]$  ou  $[y, x]$ .

Avec un chiffre  $z$  de  $E$ , on forme un unique domino double noté  $[z, z]$ .

1. Combien de dominos peut-on ainsi créer ?
2. On tire au hasard un domino.
  - a) Quelle est la probabilité d'obtenir un domino constitué de chiffres pairs ?
  - b) Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des chiffres est paire ?
3. On tire au hasard et simultanément deux dominos.
 

Un élève affirme : « la probabilité d'obtenir un domino double et un simple dont l'un des chiffres est celui du domino double est égale à  $4/45$  ».

Son affirmation est-elle vraie ou fausse ?

### Exercice 14

On dispose de deux urnes  $a$  et  $b$  contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes  $a$  et  $b$  proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix sont équiprobables), puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.

On note  $A$  l'événement « l'urne  $a$  est choisie »,  $B$  l'événement « l'urne  $b$  est choisie » et  $R$  l'événement « une boule rouge est obtenue au tirage ».

On note  $p_A(R)$  la probabilité conditionnelle de l'événement  $R$  par rapport à l'événement  $A$ .

- 
1. Dans cette question, l'urne  $a$  contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne  $b$  contient quatre boules rouges et deux boules blanches.
- Déterminez les probabilités  $p(A)$ ,  $p_A(R)$ ,  $p(A \cap R)$ .
  - Montrez que  $p(R) = 13/30$ .
  - Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne  $a$ ?
2. Dans cette question, l'urne  $a$  contient quatre boules blanches, l'urne  $b$  contient deux boules blanches. L'urne  $a$  contient en outre  $n$  boules rouges et l'urne  $b$  en contient  $(5 - n)$ , où  $n$  désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5.
- Exprimez  $p_A(R)$  et  $p_B(R)$  en fonction de  $n$ .
  - Montrez que  $p(R) = \frac{-n^2 + 4n + 10}{(4 + n)(7 - n)}$
  - On sait que  $n$  ne prend que six valeurs entières.  
Déterminez la répartition des cinq boules rouges entre les urnes  $a$  et  $b$  donnant la plus grande valeur de  $p(R)$ .