Cinquième Leçon

LA FONCTION EXPONENTIELLE

I - ET L'HOMME CRÉA L'EXPONENTIELLE...

a. Une équation différentielle

On considère un circuit électrique comprenant une résistance r et une bobine d'inductance L. Soit $u(t)$ la tension aux bornes de la bobine et soit $i(t)$ le courant qui la parcourt. Vous avez vu ou vous allez bientôt voir en cours d'électricité que tout ce beau monde est lié par la relation

$$u(t) = \mathrm{L}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + r\,i(t)$$

qui peut vous sembler un peu obscure en ce début de mois d'octobre.
Tentons malgré tout une expérience, comme dans tout bon tépéheu. On suppose qu'au temps $t = 0$, on coupe la tension. Expérimentalement, on peut vérifier à l'aide d'un ampèremètre que

$$\Delta i(t) \approx -\frac{r}{\mathrm{L}}\,i(t)\,\Delta t$$

en considérant des intervalles de temps Δt assez petits.
Cela s'écrit encore

$$\frac{i(t+\Delta t) - i(t)}{\Delta t} = -\frac{r}{\mathrm{L}}\,i(t)$$

On reconnaît dans le membre de gauche le taux d'accroissement de la fonction i entre les temps t et $t+\Delta t$. En supposant que la fonction i est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, on obtient donc, en faisant tendre Δt vers 0

$$i'(t) = -\frac{r}{\mathrm{L}}\,i(t)$$

Vous apprendrez bientôt qu'il s'agit d'un cas particulier de la première loi de Kirchhoff.
Il s'agit maintenant de déterminer $i(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

L'équation différentielle $f' = kf$ se retrouve dans de nombreux problèmes : désintégration des noyaux des atomes d'un corps radioactif, datation au carbone 14, évolution d'une population où la croissance est proportionnelle au nombre d'habitants, etc. Le problème est de trouver une fonction la satisfaisant.
Par exemple, certains phénomènes en mécanique conduisent à étudier l'équation différentielle $f'' = -f$. Nous connaissons au moins deux fonctions la satisfaisant : cosinus et sinus.
Le problème avec $f' = kf$, c'est que nous ne connaissons aucune fonction solution.

b. Construction approchée du graphe d'une solution par la méthode d'Euler

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et, pour tout x, $f'(x) = f(x)$.

1. Soit h un réel voisin de zéro. Montrez que, pour tout réel a, l'approximation affine donnée par le calcul des dérivées s'écrit
$$f(a+h) \approx (1+h) \times f(a)$$
2. On prend $h = 0,001$. On note (a_n) la suite définie par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n + h$. Donnez une approximation de $f(a_{n+1})$ en fonction de $f(a_n)$.
   Déduisez-en que la suite des approximations de $f(a_n)$ est une suite géométrique que vous caractériserez.
3. Faîtes de même avec $h = -0,001$.

4. Montrez que $f(1) \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et calculez la valeur approchée correspondante de $f(1)$ pour $n = 10\,000$.

Utiliser un tableur n'est pas très constructif. Mieux vaut faire appel à un vrai logiciel de mathématiques !...
Voici un petit programme XCAS qui construit la courbe approchée par la méthode d'Euler, c'est-à-dire que l'on va tracer la courbe correspondant à la fonction vérifiant :

- $f' = f$;
- $f(xo) = yo$;
- f est définie sur $[xo\,;xfinal]$;
- On va faire des pas de h.

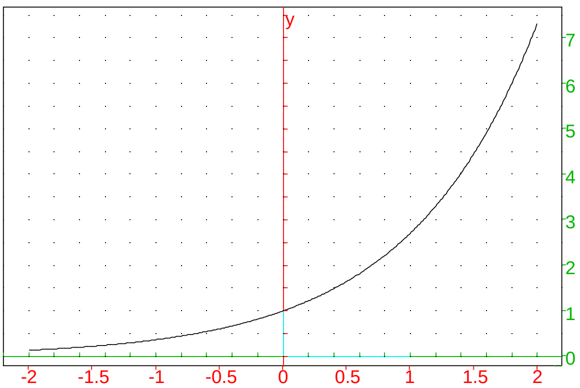
Sur XCAS, les coordonnées d'un point se notent entre crochets et pour tracer la ligne polygonale passant par des points dont on a la liste des coordonnées, on utilise la commande `polygone_ouvert([liste des coordonnées])`

```
EulerExpo(xo,yo,xfinal,h):={
X:=xo;  // au départ X vaut a
Y:=yo;  // au départ Y vaut yo
ListePoints:=[[X,Y]] // il y a un point au départ dans notre liste

 tantque abs(X) < abs(xfinal) faire // pour tester même si h est négatif
    X:=X+h; // on avance de h
    Y:=(1+h)*Y; // f(X+h)=(1+h).f(X)
    ListePoints:=append(ListePoints,[X,Y]); // on rajoute à notre liste [X,Y]
 ftantque // fin de la boucle

polygone_ouvert(ListePoints); // on relie les points de la liste "à la règle"
}:;
```

Par exemple, pour avoir le tracé entre -2 et 2 sachant que $f(0) = 1$ et en prenant un pas de $0,01$ on entre :

```
EulerExpo(0,1,-2,-0.01),EulerExpo(0,1,2,0.01)
```

et on obtient :



Analysez ce programme plus rapide à écrire :

```
Euler(x,y,xfinal,h,ListePoints):={
 si abs(x)>=abs(xfinal)
 alors polygone_ouvert(ListePoints)
 sinon Euler(x+h,(1+h)*y,xfinal,h,append(ListePoints,[x,y]))
 fsi
}:;
```

que vous pouvez tester en tapant :

```
Euler(0,-2,1,-0.01,[]),Euler(0,2,1,0.01,[])
```

c. Analyse : étude des propriétés mathématiques d'une solution

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et, pour tout x, $f'(x) = kf(x)$, avec $k \neq 0$.

1. Montrez que $f'(0) = k$.
2. Soit a un réel fixé et g la fonction définie par

$$g_a(x) = f(x+a)f(-x)$$

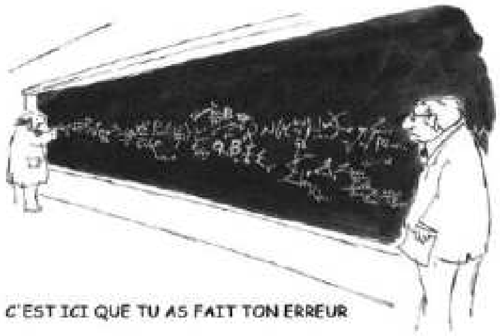
a) Montrez que g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez $g'_a(x)$.
b) Calculez $g_a(0)$ et déduisez-en que pour tous x et a réels,

$$f(x+a)f(-x) = f(a) \qquad (1)$$

3. Montrez alors successivement que

a) pour tout réel x, $f(x)f(-x) = 1$
b) f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$
c) pour tous réels x et a

$$f(x+a) = f(x)f(a)$$



d. Unicité de la fonction solution

Peut-on trouver une autre fonction, φ, distincte de f, et vérifiant les mêmes propriétés que f, à savoir : φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\varphi(0) = 1$ et, pour tout x, $\varphi'(x) = k\varphi(x)$, avec $k \neq 0$?

Comme f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut définir la fonction $\psi = \varphi/f$.
Vérifiez que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculez sa dérivée. Que peut-on en déduire pour φ ? Montrez alors que $f = \varphi$.

e. Synthèse

Nous avons cherché des solutions au problème

f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et, pour tout x, $f'(x) = kf(x)$, avec $k \neq 0$.

Nous avons montré que, *si une telle fonction existe* (ce que nous prouverons dans un prochain chapitre), alors elle est unique et elle vérifie nécessairement la relation

$$f(x+y) = f(x)f(y) \qquad (2)$$

Il reste à vérifier que, réciproquement, une fonction dérivable, non nulle, vérifiant la relation (2) est nécessairement telle que $f(0) = 1$ et vérifie pour tout réel x $f'(x) = kf(x)$, avec k un réel non nul.

Cette vérification n'est pas anodine et conclut notre raisonnement d'*analyse-synthèse*.

1. Montrez que f ne s'annule pas et que f est à valeurs strictement positives.
2. Montrez que, comme f n'est pas la fonction nulle, alors $f(0) = 1$ en utilisant la relation (2).
3. Soit a un réel fixé. On définit la fonction $\varphi : x \mapsto f(x+a)$ et la fonction $\psi : x \mapsto f(x) \times f(a)$.
Montrez que $f'(x+a) = f(a) \times f'(x)$, puis que, pour tout réel a, $f'(a) = kf(a)$, où k est un réel que vous déterminerez.

f. Le bébé est prêt

g. Conséquences immédiates

Vous pouvez démontrer aisément que :

Théorème 1 : existence et unicité de la fonction exponentielle
Il existe une unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On la nomme **fonction exponentielle** et on la note **exp**.
L'exponentielle est à valeurs strictement positives et vérifie la relation

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Propriété 1 :

- $\exp(0) = 1$
- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$
- $\exp(u) = u' \cdot \exp(u)$
- Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$
- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$
- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(ka) = [\exp(a)]^k$, avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\exp\left(\dfrac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(a)} = [\exp(a)]^{\frac{1}{n}}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

h. La notation e^x

On pose $e = \exp(1)$. Nous avons obtenu grâce à la méthode d'Euler une approximation de e, car $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

$$e \approx 2{,}71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759457138 21...$$

Nous avons obtenu précédemment que pour tout entier k,

$$\exp(k) = \exp(k \times 1) = (\exp(1))^k = e^k$$

Propriété 2 : notation
Nous noterons alors, **par convention**, que

$$\exp(x) = e^x$$

Vous vérifierez que les propriétés vues précédemment sont conformes à l'usage de la notation puissance.

i. Propriétés analytiques de l'exponentielle

- Prouvez que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty}$$

  en étudiant la fonction $\varphi : x \mapsto e^x - x$
- Déduisez-en que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^x = 0}$$

- Comparez $e^{x/2}$ et $x/2$. Déduisez-en que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

II - CONNAISSEZ-VOUS VOTRE COURS ?

Voici des exemples d'exercices s'appuyant sur une bonne connaissance du cours et qui deviennent très à la mode au Bac.

Exercice 5.1

On sait qu'une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et que pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x)f(y)$.

1. Montrez que f est à valeurs positives.

2. Montrez que $f(0) = 1$.

3. Soit a un réel fixé. Montrez que, pour tout réel x, $f'(x+a) = f(a)f'(x)$.

4. On suppose que $f'(0) > 0$

a) Quel est le sens de variation de f ?

b) Déterminez $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

5. Une fonction strictement croissante et à valeurs strictement positives diverge-t-elle forcément vers $+\infty$?

Exercice 5.2

Prérequis : la fonction exponentielle, notée exp, a les trois propriétés suivantes :

1. exp est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$;

2. sa fonction dérivée, notée exp′, est telle que, pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$;

3. $\exp(0) = 1$.

En n'utilisant que ces trois propriétés de la fonction exp, démontrer successivement que
– Pour tout nombre réel x, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$;
– pour tout nombre réel a et tout nombre réel b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Exercice 5.3

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \exp\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Rappelez la définition d'une fonction continue en zéro.

2. Existe-t-il une valeur de a telle que f soit continue en zéro ?

3. Sachant que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, montrez que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

4. Rappelez la définition d'une fonction dérivable en zéro.

5. La fonction f est-elle dérivable en zéro ?

6. Calculez $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction f' est-elle continue en zéro ?

7. Déterminez une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $\begin{cases} f(x) = u(x)\exp(v(x)) & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = a & \text{si } x = 0 \end{cases}$ telle que f soit continue en zéro mais pas dérivable en zéro. Vous expliquerez au maximum les raisons qui vous ont conduit à chercher $u(x)$ et $v(x)$ sous une forme plutôt qu'une autre. toout raisonnement sera évalué même s'il n'aboutit pas à une solution explicite.

Exercice 5.4

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

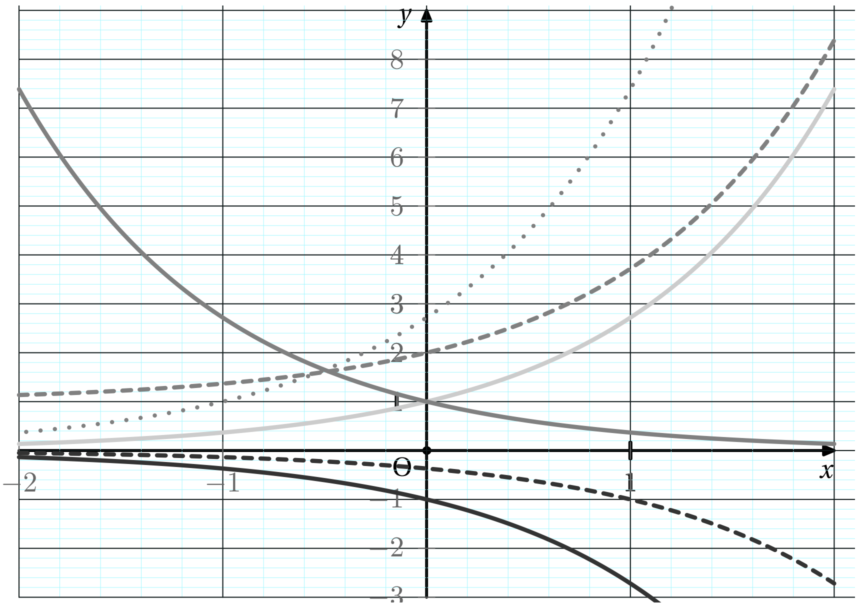
$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2,1e^{x} + 1,1x + 1,6$$

1. Faites apparaître sur l'écran de votre calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-5 \leqslant x \leqslant 4$, $-4 \leqslant y \leqslant 4$.
   Reproduire l'allure de la courbe obtenue sur votre copie.
2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :
   a) Sur les variations de la fonction f ?
   b) Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
3. On se propose maintenant d'étudier la fonction f.
   a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x} - 2,1e^{x} + 1,1 \geqslant 0$ (on pourra poser $X = e^{x}$).
   b) Étudier les variations de la fonction f.
   c) Déduire de cette étude le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-0,05\ ;\ 0,15]$, de façon à visualiser les résultats de la question **3.**
   Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y peut-on choisir pour la fenêtre de la calculatrice ?

III - EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 5.5

Reconnaître parmi les figures ci-contre les courbes représentatives des fonctions suivantes :
- $x \mapsto e^{-x}$
- $x \mapsto e^{x}$
- $x \mapsto e^{x+1}$
- $x \mapsto e^{x} + 1$
- $x \mapsto -e^{x}$
- $x \mapsto -e^{x-1}$



Exercice 5.6

Simplifiez au maximum les expressions suivantes :

1. $e^x e^{-x}$
2. $e^x e^{-x+1}$
3. ee^{-x}
4. $(e^{-x})^2$
5. $\dfrac{e^{2x}}{e^{2-x}}$
6. $\dfrac{(e^x)^3}{e^{2x}}$
7. $e^x(e^x + e^{-x})$
8. $(e^x)^5 \left(e^{-2x}\right)^2$
9. $e^{-3x+1}(e^x)^3$
10. $\sqrt{e^{-2x}}$
11. $\dfrac{e^{-4x}e}{(e^{-x})^2}$
12. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$
13. $(e^x - e^{-x})^2 - e^{-x}\left(e^{3x} - e^{-x}\right)$
14. $(e^x - e^{-x})\left(e^{2x} + e^x + 1\right)$

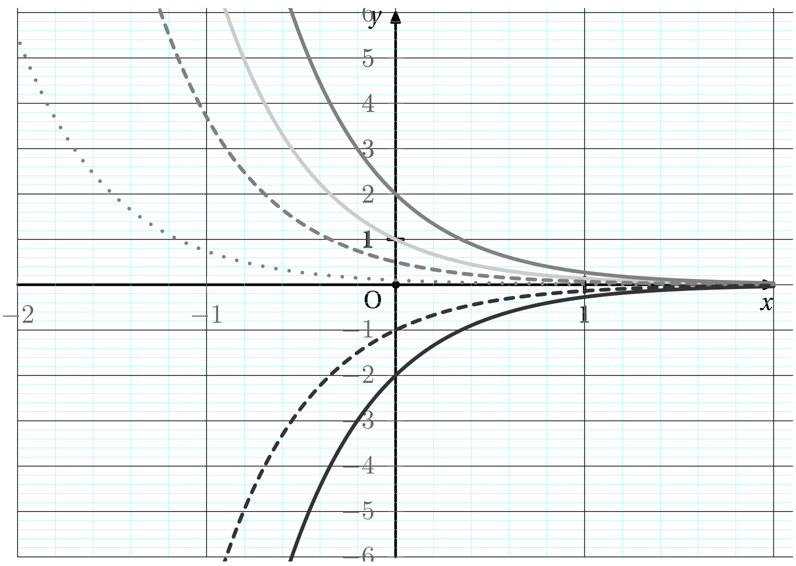
Exercice 5.7

Calculez les dérivées et les limites aux bornes des ensembles de définitions des fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $f_1(x) = e^x + x^2 + 1$
2. $f_2(x) = 5e^x + 5xe^x$
3. $f_3(x) = e^x \sin(x)$
4. $f_4(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$
5. $f_5(x) = \dfrac{3x + 1 - e^x}{e^x}$
6. $f_6(x) = x^3 e^{-x}$
7. $f_7(x) = \dfrac{x^2 e^x}{x + 1}$
8. $f_8(x) = \dfrac{e^x}{x}$
9. $f_9(x) = \dfrac{1}{e^x}$
10. $f_{10}(x) = (e^x)^2 + \dfrac{1}{e^x}$
11. $f_{11}(x) = e^{-x}$
12. $f_{12}(x) = e^{4x+1}$
13. $f_{13}(x) = e^{\cos(x)}$
14. $f_{14}(x) = e^{5x^3+7x+4}$
15. $f_{15}(x) = (x + 1)e^{-x+1}$
16. $f_{16}(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$

Exercice 5.8

1. Résolvez l'équation différentielle $y' = -2y$.
2. Dans le repère ci-dessous sont représentées les courbes de quelques solutions de l'équation différentielle précédente. Déterminez pour chacune des courbes la valeur de la constante :



3. Pour chaque couple de coordonnées, déterminez la solution de l'équation différentielle passant par ce point : (0,1) ; (0,0) ; (0,2) ; (2,-1) ; ($\sqrt{2}$,-1)

IV - DES EXERCICES DE BAC

Exercice 5.9

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 2x\left(-x^2 + 5x - 4\right)\mathrm{e}^{-x}$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

d) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

2. Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On définit la fonction v sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $v(x) = u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a) On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ (où $0 < a < b$).
Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\dfrac{1}{b}\ ;\ \dfrac{1}{a}\right]$.

b) On définit maintenant la fonction g par $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1.
Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$,

c) Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 5.10

Six affirmations, réparties en deux thèmes et numérotées de 1. a à 2. c sont proposées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI ou FAUX. Chaque réponse convenable rapporte 0,4 point. Chaque réponse erronée enlève 0,1 point. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Pour tout réel x, e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1. a	Pour tous les réels a et b : $\left(\mathrm{e}^a\right)^b = \mathrm{e}^{\left(a^b\right)}$.
Affirmation 1. b	Pour tous les réels a et b : $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.
Affirmation 1. c	La droite d'équation $y = x + 1$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

Affirmation 2. a	Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Affirmation 2. b	Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.
Affirmation 2. c	Si f est dérivable en a, alors la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

Exercice 5.11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.

2. Justifier que pour tout x, $(\mathrm{e}^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

1. a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2. a) Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
   b) Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.

3. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
   b) À l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (T).

4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 5.12

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

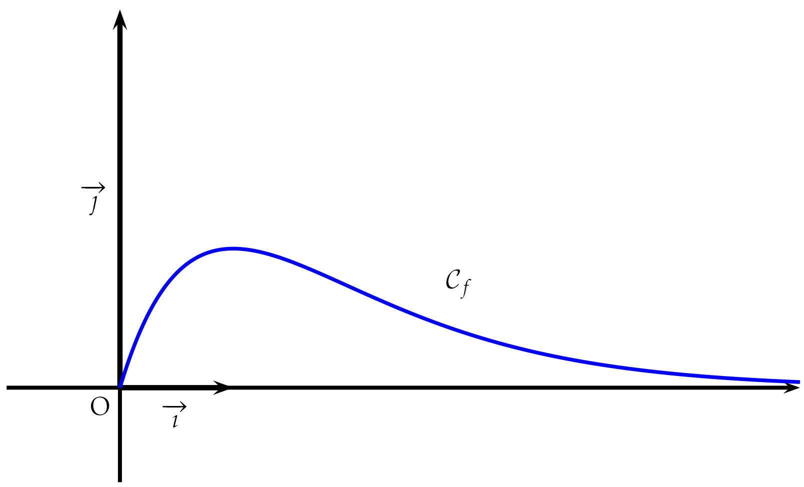
La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ est donnée en annexe (à rendre avec la copie).

1. D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction f et sa limite en $+\infty$?

2. Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.

3. Tracer sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie) la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction g.

4. Quelle semble être la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$?
   Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.



Exercice 5.13

A - Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. Démontrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.

B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-x}$. On note $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

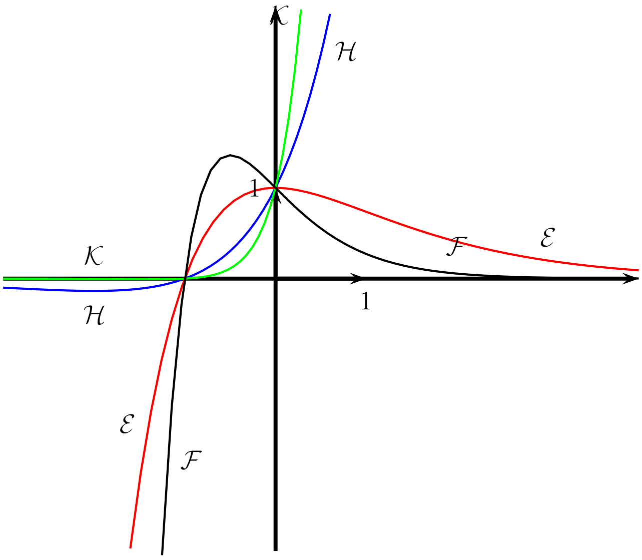
1. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

   Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.
2. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

C - Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x+1)e^{kx}$. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.

On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathcal{C}_{-1} = \mathcal{C}$.



1. a) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

   b) Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.

   Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_k$.
2. Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression : $(x+1)(e^x - 1)$.

   En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$.
3. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.

   En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k. (On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)

4 Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$, et $\mathcal{K}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k, parmi les entiers -1, -3, 1 et 2.
Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.

Exercice 5.14

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1. **Restitution organisée de connaissances :**

   La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} g'(x) &= g(x) \\ g(0) &= 1 \end{cases}$.

   Démontrer que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 5.15

Partie A : question de cours

1. Soit f une fonction réelle définie sur $[a\,;\,+\infty[$. Compléter la phrase suivante :
   « On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si ... »
2. Démontrer le théorème « des gendarmes » : soient f, g et h trois fonctions définies sur $[a\,;\,+\infty[$ et ℓ un nombre réel. Si g et h ont pour limite commune ℓ quand x tend vers $+\infty$, et si pour tout x assez grand $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, alors la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à ℓ.

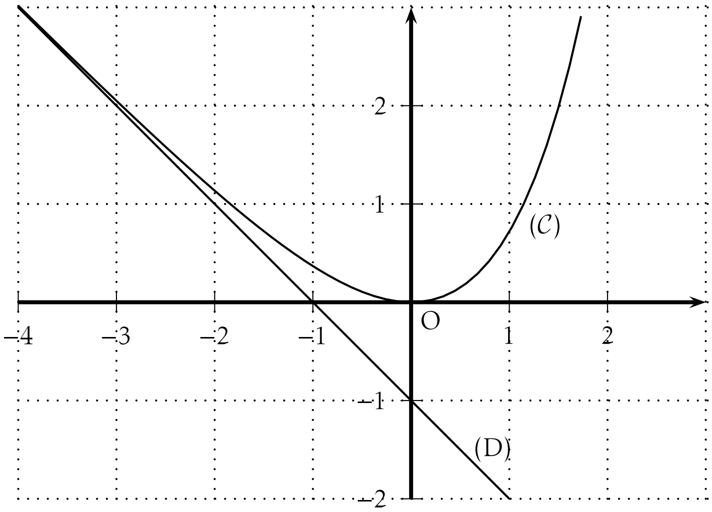
Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$. On a représenté sur la feuille annexe la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D).

1. Soit a un nombre réel. Écrire, en fonction de a, une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point M d'abscisse a.
2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b. Vérifier que $b - a = -1$.
3. En déduire une construction, à effectuer sur la feuille annexe, de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point M d'abscisse $1{,}5$. On fera apparaître le point N correspondant.



Partie C

1. Déterminer graphiquement le signe de f.
2. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :

$$(1) \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n} \qquad (2) \quad \mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}$$

3. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$$

4. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

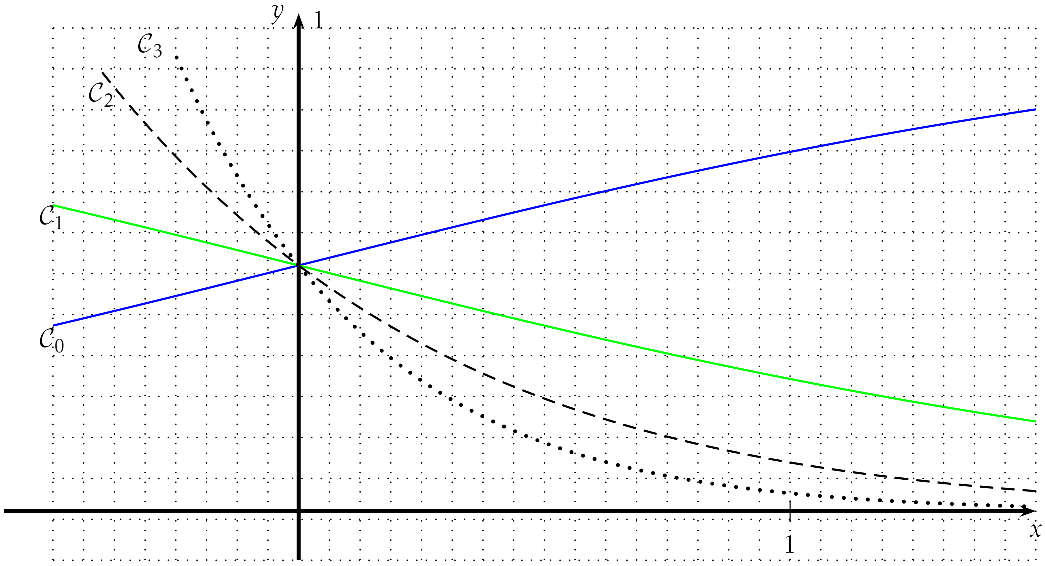
5. Déduire des questions précédentes un encadrement de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ puis sa limite en $+\infty$.

Exercice 5.16

Soit n un entier naturel.
On note f_n, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



1. Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathcal{C}_n$ ont un point A en commun. On préciser ses coordonnées.
2. Étude de la fonction f_0
   a) Étudier le sens de variation de f_0.
   b) Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.
   c) Dresser le tableau de variation de fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.
3. Étude de la fonction f_1
   a) Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.
   b) En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
   c) Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.
4. Étude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$
   a) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$

   b) Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c) Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.17

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = e^x$.

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

1. Soit a un nombre réel. Démontrer que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point P d' abscisse $a-1$.

2. Soit N le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses. Démontrer que $\overrightarrow{NP} = -\vec{i}$

PARTIE B

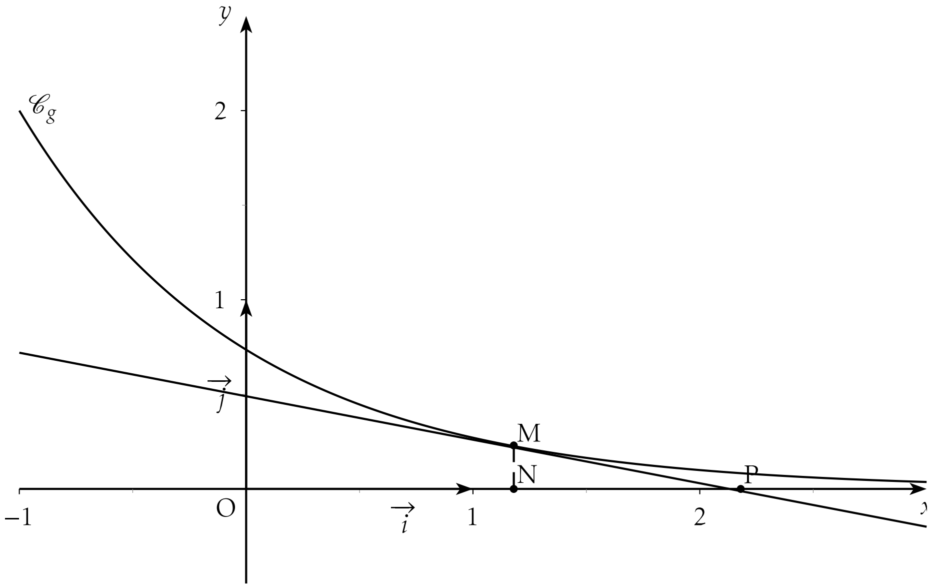
Soit g une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels telle que $g'(x) \neq 0$ pour tout nombre réel x.

On appelle $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

Soit a un nombre réel. On considère le point M de la courbe $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a et le point N projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses.

Soit P le point d'intersection de la tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point M avec l'axe des abscisses.

Le graphique ci-dessous illustre la situation de la partie B.



1. Démontrer que le point P a pour coordonnées $\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}\right)$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Existe-t-il une fonction g vérifiant $g(0) = 2$ et $\overrightarrow{NP} = \vec{i}$?

Exercice 5.18

1. **Restitution organisée de connaissances.**

   L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
   On supposera connus les résultats suivants :

   - la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;
   - $e^0 = 1$;
   - pour tout réel x, on a $e^x > x$.
   - Soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A\ ;\ +\infty[$ où A est un réel positif.
     Si pour tout x de $[A\ ;\ +\infty[$, $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

   a) On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.
   Montrer que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

   b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

2. On appelle f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}$.
   On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   La courbe $\mathcal{C}$ est représentée en annexe.

   a) Montrer que f est positive sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour $\mathcal{C}$.

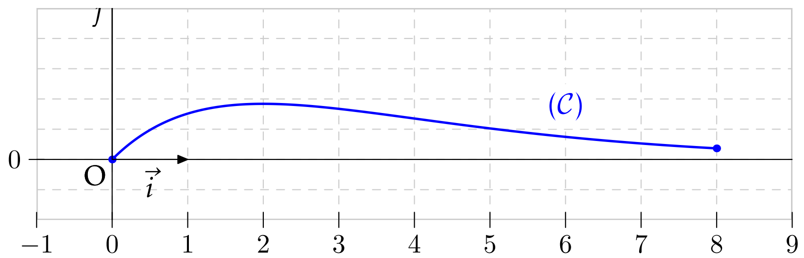
   c) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. On considère la fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) == 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.

   a) Montrer que F est une fonction strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   b) Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   c) Justifier l'existence d'un unique réel positif α tel que $F(\alpha) = 0,5$.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.



Exercice 5.19

1. Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0$ (E), dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. On considère l'équation différentielle :

$$2y' + y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad (\mathrm{E}')$$

   a) Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right) \text{ soit solution de } (\mathrm{E}').$$

   b) Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que g est solution de l'équation (E′) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).
   Résoudre l'équation (E′).

3. Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x\right)$.
4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.
5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
   a) Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et Γ.
   b) Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

V - POUR RÉFLÉCHIR

Exercice 5.20

Donnez un maximum d'informations sur les fonctions $f : x \mapsto e^x \sin x$, $g : x \mapsto e^{(1/\cos x)}$ et $h : x \mapsto e^{-x}\cos x$.

Exercice 5.21

La fonction $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ a \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5.22

On pose $g_n(t) = t^n e^{-t}$. On note $g_n^{(n)}$ la dérivée n-ième de g_n. Montrer que $t \mapsto e^t g_n^{(n)}(t)$ est une fonction polynomiale de degré n.

Exercice 5.23

On appelle cosinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch} \ : \ x \mapsto \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

sinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{sh} \ : \ x \mapsto \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et tangente hyperbolique la fonction définie par

$$\mathrm{th} \ : \ x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

1. Déterminez les dérivées de ces fonctions en fonction de ch et sh.
2. Étudiez ces fonctions pour montrer que ch est à valeurs dans $[1,+\infty]$ et que th est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$.
3. Calculez $\mathrm{th}(x)$ en fonction de e^x et e^{-x}, puis en fonction de e^{2x}, enfin en fonction de e^{-2x}.
4. Montrez que $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.
5. Montrez que $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$ et que $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$.
6. Déduisez-en que $\mathrm{th}(x+y) = \dfrac{\mathrm{th}(x)+\mathrm{th}(y)}{1+\mathrm{th}(x)\mathrm{th}(y)}$
7. On pose $t = \mathrm{th}(x/2)$. Montrez que $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ puis que $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$
8. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $5\,\mathrm{ch}(x) - 4\,\mathrm{sh}(x) = 3$. Vous donnerez une valeur approchée de la solution à 10^{-3} près.
9. Pour le plaisir : dérivez la fonction $x \mapsto \dfrac{2\sin(x)\mathrm{sh}(x)}{(\mathrm{sh}(x)+\sin(x))^2}$
10. Soit $y \in \mathbb{R}$. Comparez $\mathrm{sh}(y)$ et y.
11. Montrez que $\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)$ puis étudiez la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{th}(x)}{x}$$

.

VI - L'EXPONENTIELLE À TRAVERS LES SCIENCES

Exercice 5.24

Les molécules d'un gaz enfermé dans un récipient à la température T sont animées d'une vitesse de v cm.s^{-1}. Cet état d'équilibre est caractérisé par la fonction de distribution de vitesse de Maxwell-Boltzmann

$$\mathrm{F}(v) = cv^2\, e^{-mv^2/(2k\mathrm{T})}$$

où T est la température (en K), m la masse d'une molécule et c et k des constantes positives.
Montrez que la valeur maximale de F a lieu en $v = \sqrt{2k\mathrm{T}/m}$.

Exercice 5.25

La fonction de croissance de von Bertanlanffy donne approximativement la masse $W(t)$ (en kg) à l'âge t (en années) des éléphantes africaines. Son expression est

$$W(t) = 2600\left(1 - 0,51e^{-0,075t}\right)^3$$

1. Évaluez la masse et le taux de croissance d'un nouveau-né (le taux de croissance à l'instant t est évidemment $W'(t)$).

2. Calculez et interprétez $\lim\limits_{t\to+\infty} W(t)$.

Exercice 5.26

Un *modèle de densité urbaine* est une formule qui lie la densité de la population (en nombre de personnes par unité de surface) à la distance r (en unité de longueur) du centre ville. La formule

$$D = a\,e^{-br+cr^2}$$

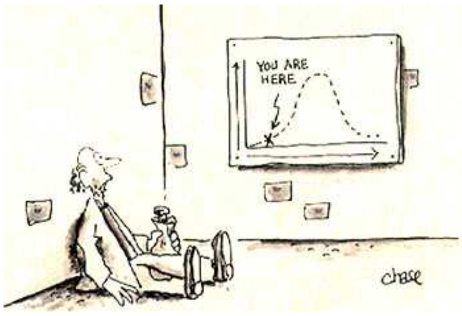
où a, b et c sont des constantes positives (a est la densité au centre, b le coefficient de décroissance), convient pour certaines villes des États-Unis
Déterminez l'allure de la courbe représentative de ce modèle.

Exercice 5.27

En statistiques, la *distribution normale* est définie par la fonction de densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \quad \text{où} \quad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

μ est la moyenne de cette distribution et σ^2 la variance. L'étude de cette fonction est utilisée dans des domaines qui vont de la mécanique quantique à la répartition des notes du baccalauréat. Étudiez cette fonction (sens de variation, limites) et tracez la courbe représentative de f.



Exercice 5.28

On considère un circuit électrique composé d'une force électromotrice U, d'une résistance R et d'une inductance L. L'intensité du courant I varie en fonction du temps t selon la formule

$$I = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

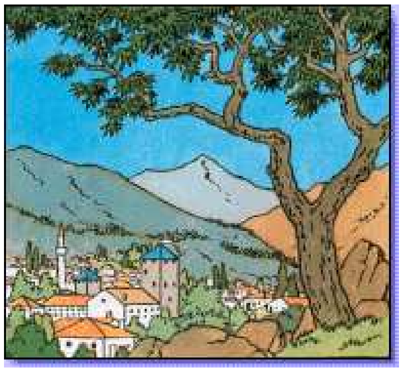
On considère que R est la seule variable indépendante, *i.e.* U, L et t sont considérés comme des constantes et R comme une variable. Calculez $\lim\limits_{\substack{R\to0\\R>0}} I$.

Exercice 5.29

La loi de Newton sur le refroidissement dit que la vitesse de refroidissement d'un objet est proportionnelle à l'écart de température entre l'objet et le milieu ambiant.
L'inspecteur CLOUSEAU arrive sur les lieux d'un meurtre à 9h00. Il commence par prendre la température de la victime : 30°C. Une heure plus tard, la température du corps est tombée à 29°C. Sachant que la température normale du corps d'une personne vivante en bonne santé est de 37°C, que la victime était syldave, qu'elle aimait les films de gladiateurs et se trouvait dans une pièce maintenue à 0°C, estimez l'heure du décès de la victime et la couleur de ses yeux.

Exercice 5.30

Dans la forêt syldave, des détritus naturels (feuilles, branches, animaux morts, cadavres d'espions, etc.) tombent sur le sol et s'y décomposent. La quantité $Q(t)$ exprimée en $g \cdot m^{-2}$ de détritus jonchant le sol varie avec le temps t. On suppose que de nouveaux détritus tombent au sol à un taux constant de $200\,g \cdot m^{-2}$ par année et que les détritus accumulés au sol se décomposent au taux de 50% de la quantité de détritus jonchant le sol.



1. On note $f(t) = Q(t) - 200$. Déterminez une équation différentielle vérifiée par f.
2. En déduire l'expression générale de $Q(t)$.
3. Exprimer $Q(t)$ sachant qu'au temps $t = 0$, on comptait $50\,g \cdot\ m^{-2}$

Dans les exercices qui suivent on utilisera les notations vues dans l'exercice 5.17 page *16*

Exercice 5.31

Si vous allez vous promener dans la ville de Saint-Louis dans le Missouri aux États-Unis, vous pourrez y admirer la célèbre *Gateway Arch to the West* conçue en 1947 par l'architecte finlandais Ero SAARINEN et l'ingénieur Hannskarl BANDEL et dont la construction s'acheva en 1965. Cette arche a la forme d'une *chaînette* d'équation

$$y = 212 - 21\,\mathrm{ch}(0,033x)$$

où x et y sont mesurés en mètres et rend hommage aux pionniers partis à la conquête de l'Ouest.
Pouvez-vous déterminer la hauteur de l'arche et la distance entre les deux pieds ?

Exercice 5.32

L'équation de la hauteur h par rapport au sol d'un fil électrique suspendu entre deux poteaux s'obtient en résolvant l'*équation différentielle*

$$h''(x) = k\sqrt{1 + (h'(x))^2}$$

où k est un paramètre qui dépend de la densité et de la tension du fil et x est mesuré en mètres horizontalement à partir d'une origine située sur le sol en-dessous du point où la hauteur du fil est la plus faible.

1. Vérifiez que $h : x \mapsto \frac{1}{k}\operatorname{ch}(kx)$ satisfait cette équation différentielle.

2. Quelle est la hauteur minimale du fil si le paramètre k vaut $0,05$?

3. Quelle est la hauteur des poteaux (de même hauteur) s'ils sont distants de 30 m et que le paramètre k vaut 0,05 ?