Chapitre 13

Géométrie euclidienne

Résumé Nous allons développer dans cette leçon une des grandes nouveautés de terminale : le lien entre algèbre et géométrie, deux domaines jusqu'ici étrangers. L'outil central sera le produit scalaire qui sera donc étudié avec attention. Vous verrez l'an prochain qu'un « ensemble de vecteurs » dans lequel on peut définir un produit scalaire est appelé espace euclidien.

I - Construisons le produit scalaire

Construisons le produit scalaire

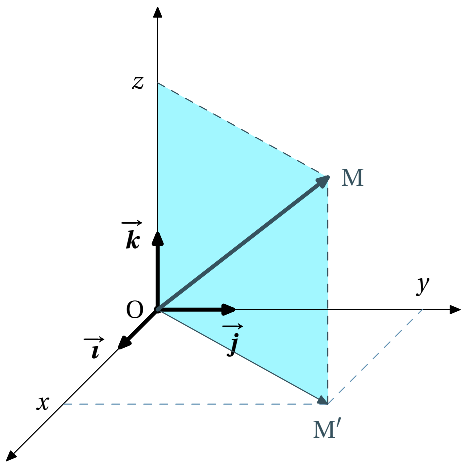
À la recherche d'une définition

Vous avez remarqué au moment de l'étude de la fonction exponentielle que son mode de construction n'était pas unique : certains partent de l'équation différentielle $y' = y$, d'autres de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) \times f(y)$, d'autres encore de la suite de terme général $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ ou même de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$...Pourtant, tous construisent la même fonction, car ces définitions s'avèrent équivalentes. La nature du problème étudié, le niveau d'enseignement, etc. incitent alors à préférer l'une ou l'autre des définitions.
C'est encore le cas pour le produit scalaire. Nous choisirons la méthode la plus adaptée au programme de terminale et n'utiliserons que le théorème de Pythagore en admettant que l'on peut munir l'Espace d'un repère orthonormé.

Définition 1 Produit scalaire dans l'Espace
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormé de l'Espace.
On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ que l'on note $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ le réel

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

Cette définition est déroutante : elle dépend du choix d'un repère : y aurait-il un produit scalaire par repère, ce qui pourrait s'avérer fort gênant ! Nous allons en fait nous assurer que cette définition en est bien une, c'est à dire qu'elle ne dépend pas du choix du repère.
Tout d'abord, un petit dessin :



Soit $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ un représentant du vecteur $\vec{u}$. Nous pouvons calculer OM^2, c'est à dire le carré de la norme du vecteur $\vec{u}$ en fonction de x, y et z.
D'après le théorème de Pythagore : $\mathrm{OM}^2 = \mathrm{OM}'^2 + z^2$ et d'autre part, $\mathrm{OM}'^2 = x^2 + y^2$. Finalement on obtient que $\mathrm{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2$.
Cette formule permet surtout de prouver, avec un minimum de sens de l'observation, que

Propriété1 Norme et produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^2$$

Vous aurez remarqué qu'il n'est pas fait mention de repère dans cette propriété et qu'elle est donc indépendante du repère choisi.
Intéressons-nous maintenant à $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2$

$$\begin{aligned}\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 &= (x+x')^2 + (y+y')^2 + (z+z')^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2(xx' + yy' + zz') \\ &= \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v})\end{aligned}$$

Je vous laisse le soin d'obtenir une formule similaire en remplaçant $\vec{v}$ par son opposé.

Propriété2 Expression du produit scalaire en fonction de la norme

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|^2\right)\end{aligned}$$

Ces expressions peuvent paraître déroutantes car très compliquées, voire inexploitables. Cependant, elles offrent un énorme avantage : elles prouvent que le produit scalaire ne dépend pas des coordonnées et donc de la base choisie. Nous pouvons donc utiliser sans retenue la définition qui en est bien une finalement. Nous verrons en exercices qu'il existe une définition bien plus générale.
Notez de plus que cette dernière formulation est valable dans le Plan comme dans l'Espace car la démonstration est indépendante de la « dimension » choisie, ce qui améliore encore son « champs d'action ».

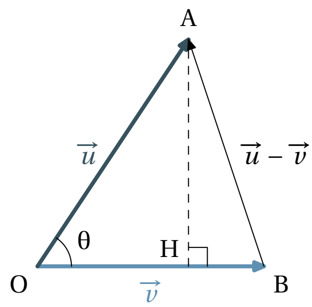
Toujours grâce à cette propriété, nous pouvons prouver que les propriétés suivantes sont vraies quelque soit la base choisie

Propriétés 3 Propriétés de bilinéarité et de symétrie

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\left(\alpha\vec{u}\right)\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\left(\alpha\vec{v}\right) = \alpha\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$
- $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

Produit scalaire et cosinus

Nous allons maintenant interpréter géométriquement le produit scalaire. Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de représentants $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$



Nous allons essayer de prouver le résultat vu en première : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \mathrm{OH}\times\mathrm{OB}$ à partir de la propriété VII-2.
Le thèorème de Pythagore permet d'écrire d'une part que $\mathrm{OH}^2+\mathrm{AH}^2=\mathrm{OA}^2$ et d'autre part que $(\mathrm{OB}-\mathrm{OH})^2+\mathrm{AH}^2=\mathrm{AB}^2$.
On élimine AH^2 pour obtenir

$$\mathrm{OB}\times\mathrm{OH} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right) = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

On obtiendrait d'ailleurs un résultat similaire si H était « de l'autre côté » de O, en transformant OH en $-\mathrm{OH}$, puisque dans ce cas $\mathrm{HB}=\mathrm{OB}+\mathrm{OH}$.
Bon, ici un problème se pose : on sait que $\mathrm{OB}=\left\|\vec{v}\right\|$ mais comment interpréter OH ? On a envie d'écrire que $\mathrm{OH}=\left\|\vec{u}\right\|\times\cos\theta$ comme au collège, mais qu'est-ce que θ ? Qu'est-ce que $\cos\theta$?

Nous allons trancher dans le vif. Considérons deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Notons

$$\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|}$$

La définition du produit scalaire à partir des normes étant la même dans le Plan et l'Espace, on va pouvoir parler de l'angle entre deux vecteurs de l'espace à partir de la même formule.
On peut noter que deux vecteurs définissant un plan (vectoriel), il est naturel d'étendre la notion d'angle de vecteurs du Plan à l'Espace.
Demeure un dernier problème : le Plan était orienté, or nous n'avons pas parlé d'orientation de l'Espace (et nous ne le ferons pas cette année). Les angles de vecteurs de l'Espace seront donc définis au signe près et mesurés dans $[0,\pi]$, ce qui rejoint la notion d'angle géométrique vu au Collège.

Théorème 1 Produit scalaire et cosinus
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'Espace. On a

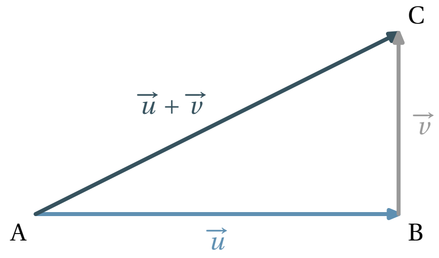
$$\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|}$$

avec $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ l'unique antécédent de $\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|}$ par la fonction cosinus dans $[0,\pi]$.

On retrouve de cette manière la formule bien connue $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\theta$.

Produit scalaire et orthogonalité

Nous allons maintenant aborder la notion qui a motivé l'introduction du produit scalaire en Terminale, à savoir l'orthogonalité de deux vecteurs
Considérons la figure suivante :



Si (AB)⊥(BC), alors le théorème de Pythagore assure que $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2$.
Or $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|-\left\|\vec{v}\right\|\right)$, donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Inversement, si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, alors $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2$ et la réciproque du théorème de Pythagore assure que (AB)⊥(AC).
Finalement

Théorème 2 Produit scalaire et orthogonalité

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et trois points O, A et B tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :
(1) (OA) et (OB) sont perpendiculaires
(2) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
(3) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. On notera $\vec{u}\perp\vec{v}$
Par souci de cohérence, on dira que le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Vous noterez que ces résultats sont cohérents avec la définition du cosinus.

II - Applications du produit scalaire

Applications du produit scalaire

Affine ⁄ Vectoriel

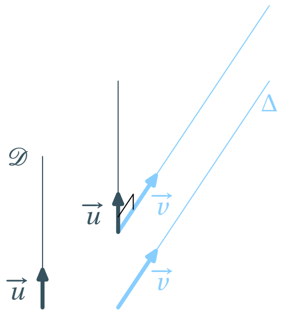
Avant d'aller plus loin, commençons par parler des limites de notre exposé. Dans l'enseignement secondaire, vous n'avez travaillé que dans des espaces *affines*, c'est à dire, grossièrement, avec des ensembles de points : droites, cercles, segments de droites, angles géométriques, etc. Or vous découvrirez l'an prochain la géométrie à partir d'espaces *vectoriels*, c'est à dire, grossièrement, avec des ensembles stables par combinaison linéaire comme l'ensemble des vecteurs du Plan : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs du Plan et λ et μ des réels, alors $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ est encore un vecteur du plan. Ensuite, vous définirez les espaces affines à partir des espaces vectoriels[a]
Nous ne pouvons bien sûr pas suivre ce cheminement. Nous nous appuirons donc sur les résultats « affines » vus au lycée et au collège et n'évoquerons les espaces vectoriels qu'à titre d'exercice.
Il est malgré tout très important de bien distinguer ces deux domaines et nous ferons souvent des appels intuitifs à ces notions. Ayez cependant bien en tête que nous travaillerons principalement dans des espaces affines et que le recours aux outils vectoriels doit se faire avec prudence.

a Ces structures dépassent largement la Géométrie : vous découvrirez par exemple que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre a une structure d'espace vectoriel de dimension 2 et l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre a une structure d'espace affine de dimension 2 comme un plan dans l'Espace « géométrique » du lycée.

Droites ortogonales

Définition 2 Droites orthogonales

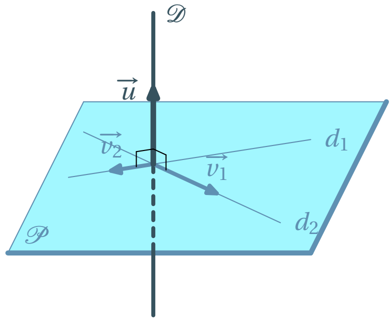
Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et Δ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.
On dira que les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont **orthogonales** et on notera $\mathscr{D}\perp\Delta$ si et seulement si $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$ c'est à dire si et seulement si $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$



Droites et plans orthogonaux

Définition 3 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathscr{P}$ un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.
On dira que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont orthogonaux et on notera $\mathscr{D}\perp\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v_2}$ c'est à dire si et seulement si $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v_1}=0$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v_2}=0$



Notez bien que, comme dans le cas des droites, l'orthogonalité est en fait une propriété vectorielle. On peut néanmoins en donner une formulation équivalente en faisant intervenir des points :

$\mathscr{D}\perp\mathscr{P}$ si et seulement si, pour tous points M et N de $\mathscr{P}$ on a $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=0$

En effet, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ étant des vecteurs directeurs de $\mathscr{P}$, il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{\mathrm{MN}}=x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2}$ et donc

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{u}\cdot\left(x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2}\right)=x\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v_2}=0$$

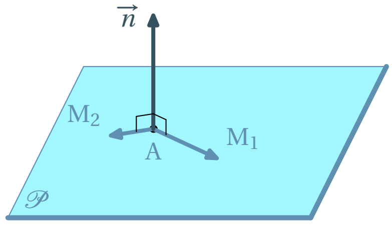
Notez qu'on retrouve la définition 3 en prenant $x=1$ et $y=0$, puis $x=0$ et $y=1$.

Vecteur normal à un plan

La direction d'une droite est déterminée par la donnée d'un vecteur. Le problème pour un plan, c'est qu'on a besoin a priori de deux vecteurs, ce qui est doublement plus compliqué et qui gène le mathématicien qui vise toujours la simplicité (si si !...). C'est ici que l'intuition vectorielle vient nous sauver : si un plan a deux directions, il n'a qu'une seule « direction orthogonale »

et donc la direction du plan sera entièrement determinée par la donnée d'un vecteur orthogonal à la direction du plan, qu'on appelera **vecteur normal** au plan.
Nous ne nous lancerons pas dans une preuve artificielle à notre niveau et qui sera simple avec les outils que vous découvrirez l'an prochain, mais nous nous contenterons de cette approche intuitive.

Définition 4 Vecteur normal à un plan
Étant donné un plan $\mathscr{P}$, on appelera **vecteur normal** à $\mathscr{P}$ tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathscr{P}$



Nous admettrons alors les résultats suivants :

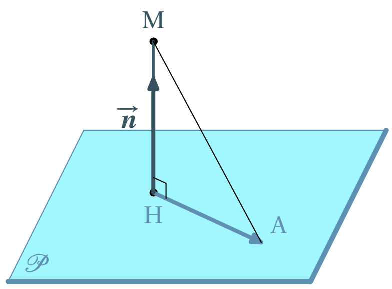
Théorème 3 Détermination d'un plan à l'aide d'un vecteur normal
Soit $\mathscr{P}$ un plan, A un point de $\mathscr{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$, alors le point M appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.
Réciproquement, si A est un point quelqconque et $\vec{n}$ un vecteur non nul, alors l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ est un plan.

Distance d'un point à un plan

Mettons-nous d'accord sur une définition :

Définition 5 Distance d'un point à un plan
Soit M un point, $\mathscr{P}$ un plan. On appelle distance de M à $\mathscr{P}$ la distance MH, avec H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$

Vous pouvez commencer, pour vous échauffer, par montrer à l'aide d'un dessin et d'un petit raisonnement utilisant un théorème connu depuis fort longtemps, que MH est en fait le minimum des distances MN, $N\in\mathscr{P}$.
Il reste à exprimer cette distance MH. On suppose connu le plan $\mathscr{P}$ et donc un point quelconque A de $\mathscr{P}$ et un de ses vecteurs normaux $\vec{n}$.
Aidons-nous alors du dessin suivant :



Cela doit maintenant devenir un reflexe : qui dit projection orthogonale, dit produit scalaire, donc la distance MH devrait pouvoir s'exprimer en fonction de $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}$.
Or on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} &= \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}\right)\cdot\vec{n}\\
&= \overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}+\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}\\
&= \overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}\\
&= \pm\,\mathrm{d}(M,\mathscr{P})\times\left\|\vec{n}\right\|
\end{aligned}$$

Le plus ou le moins étant choisis selon les sens respectifs de $\overrightarrow{\mathrm{HM}}$ et $\overrightarrow{n}$. Le problème, c'est qu'on ne les connait pas a priori. Mais ce n'est plus un problème si on cache les signes sous une valeur absolue, puisque c'est la distance - positive - qui nous intéresse.

Ainsi, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{n}\right| = \mathrm{d}(\mathrm{M},\mathscr{P})\times\left\|\overrightarrow{n}\right\|$ et donc

Théorème 4 Calcul de la distance d'un point à un plan

Soit $\mathscr{P}$ un plan passant par le point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et soit M un point quelconque. Alors

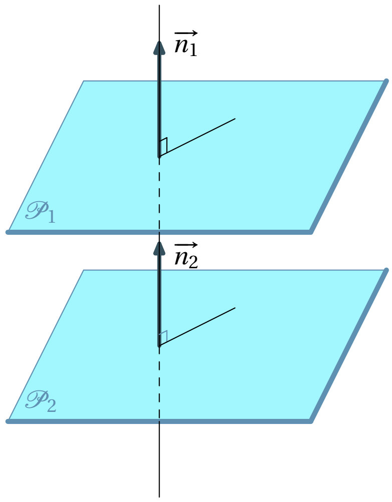
$$\mathrm{d}(\mathrm{M},\mathscr{P}) = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\left\|\overrightarrow{n}\right\|}$$

Plans parallèles

Voici une utilisation bien pratique de la notion de vecteur normal :

Propriété4 Plans parallèles

Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

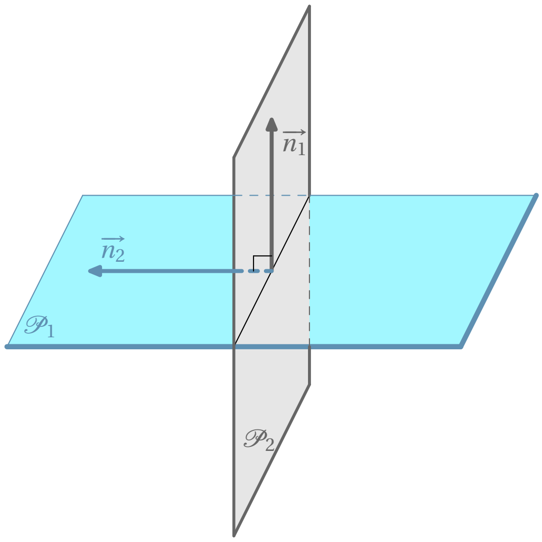


Plans perpendiculaires

En voici une autre souvent utile en exercice :

Prop Plans perpendiculaires

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.



Remarquez en particulier que $\overrightarrow{n_1}$ et un vecteur directeur de $\mathscr{P}_2$ et $\overrightarrow{n_2}$ un vecteur directeur de $\mathscr{P}_1$.

III - Géométrie analytique

Géométrie analytique

Représentation paramétrique d'un plan

Soit $\mathscr{P}$ un plan passant par A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$. Alors un point M de coordonnées (x, y, z) appartient à $\mathscr{P}$ si, et seulement s'il existe deux réels λ et μ tels que

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$$

c'est à dire, en appliquant cette relation aux coordonnées

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda a + \mu a' \\ y = y_A + \lambda b + \mu b' \\ z = z_A + \lambda c + \mu c' \end{cases}$$

C'est ce qu'on appelle une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$. Il est également utile de retrouver les éléments caractéristiques du plan (un point et deux vecteurs directeurs) à partir de cette représentation.

Équation cartésienne d'un plan

On utilise plus couramment une équation cartésienne de plan. En effet, nous avons vu qu'un plan était entièrement déterminé par la donnée d'un point et d'un vecteur normal.

Soit donc $\mathscr{P}$ un plan passant par A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Alors M de coordonnées (x, y, z) appartient à $\mathscr{P}$ si, et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \perp \overrightarrow{n}$, c'est à dire

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{n} &= a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) \\ &= ax + by + cz - (ax_A + by_A + cy_A) \\ &= 0 \end{aligned}$$

C'est à dire encore, en posant $d = ax_A + by_A + cz_A$

$$\mathrm{M}(x, y, z) \in \mathscr{P} \Longleftrightarrow ax + by + cz = d \text{ avec } \overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ un vecteur normal à } \mathscr{P}$$

Représentation paramétrique d'une droite

Quant aux droites, nous n'avons guère le choix : un point M appartient à la droite $\mathscr{D}$ passant par A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ si, et seulement s'il existe un réel λ tel que

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \lambda \overrightarrow{u}$$

c'est à dire si, et seulement si

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda a \\ y = y_A + \lambda b \\ z = z_A + \lambda c \end{cases}$$

Notez bien que λ est le paramètre de la représentation (d'où l'appellation), mais aurait pu porter tout autre nom.

IV - Barycentres

Barycentres

Quelques rappels

Définition 6 Barycentre

Soient $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2 ..., \mathrm{A}_n$ n points distincts du plan ou de l'espace. Soient $\alpha_1,\ \alpha_2 ..., \alpha_n$ n réels tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$, alors on appelle barycentre des points $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2 ..., \mathrm{A}_n$ affectés des coefficients $\alpha_1,\ \alpha_2 ..., \alpha_n$ le point G défini par

$$\alpha_1 \overrightarrow{\mathrm{GA}_1} + \alpha_2 \overrightarrow{\mathrm{GA}_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{\mathrm{GA}_n} = \overrightarrow{0}$$

Ça, vous connaissez par cœur. Il est maintenant utile de connaître la «manip» suivante, pour exprimer G en fonction de points connus. Soit donc M un tel point (en général O, l'origine du repère), alors

$$\alpha_1\left(\overrightarrow{\mathrm{GM}} + \overrightarrow{\mathrm{MA}_1}\right) + \alpha_2\left(\overrightarrow{\mathrm{GM}} + \overrightarrow{\mathrm{MA}_2}\right) + \cdots + \alpha_n\left(\overrightarrow{\mathrm{GM}} + \overrightarrow{\mathrm{MA}_n}\right) = \overrightarrow{0}$$

puis, finalement, en regroupant astucieusement les termes, on obtient

Fonction vectorielle de Leibniz

$$\overrightarrow{\mathrm{MG}} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\left(\alpha_1 \overrightarrow{\mathrm{GA}_1} + \alpha_2 \overrightarrow{\mathrm{GA}_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{\mathrm{GA}_n}\right)$$

En particulier, en prenant M = O, on obtient

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\left(\alpha_1 x_{A_1} + \alpha_2 x_{A_2} + \cdots + \alpha_n x_{A_n}\right) \\ y_G = \dfrac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\left(\alpha_1 y_{A_1} + \alpha_2 y_{A_2} + \cdots + \alpha_n y_{A_n}\right) \\ z_G = \dfrac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\left(\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \cdots + \alpha_n z_{A_n}\right) \end{cases}$$

Quelques nouveautés

Nous commenterons en classe les résultats suivants

Théorème 5 aractérisations barycentriques des droites et des plans

- ▷ La droite (AB) est l'ensemble des barycentres des points A et B.
- ▷ Le segment [A ; B] est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients positifs.
- ▷ Soient A, B et C trois points non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des points A, B et C

Ce chapitre est assez riche en cours, mais surtout en applications de ces résultats : les exercices qui suivent peuvent donc être considérés comme faisant partie intégrante du cours.

V - ÉNONCÉS DES EXERCICES

Énoncés des exercices

Exercice 1 QCM1

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ est :
a) l'ensemble vide **b)** un plan **c)** une sphère

2. On considère les points $A(0 ; 1 ; -2)$ et $B(2 ; 1 ; 0)$.
Les coordonnées du barycentre G de (A ; 1) et (B ; 3) sont :
a) G(6 ; 4 ; -2) **b)** G(1,5 ; 1 ; -0,5) **c)** G(0,5 ; 1 ; 1,5)

3. La droite d a pour représentation paramétrique $x = 2 - t$; $y = 3t$; $z = -3$, $t \in \mathbb{R}$.
On considère les points $A(2 ; 3 ; -3)$, $B(2 ; 0 ; -3)$ et $C(0 ; 6 ; 0)$. On a :
a) $d = (AB)$ **b)** $d = (BC)$ **c)** $d \neq (AB)$ et $d \neq (BC)$ et $d \neq (CA)$

4. Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+t \\ y & = & 1-t \\ z & = & 1+t, t \in \mathrm{R}, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -t' \\ y & = & -2-1,5t' \\ z & = & 3+t',\ t' \in \mathrm{R} \end{array}\right.$$ admettent comme point commun :

a) $I(3 ; 0 ; 2)$ **b)** $J(2 ; 1 ; 1)$ **c)** $K(0 ; 2 ; -3)$

5. Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & 1+2t \\ z & = & 1+t,\ t \in \mathrm{R}, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3-2t' \\ y & = & 7-4t' \\ z & = & 2-t',\ t' \in \mathrm{R} \end{array}\right.$$

sont :
a) parallèles **b)** sécantes **c)** non coplanaires

6. La droite de représentation paramétrique $x = -4t$; $y = 1 + 3t$; $z = 2 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$ et le plan d'équation $x - 2y + 5z - 1 = 0$ sont :
a) orthogonaux **b)** parallèles **c)** ni orthogonaux ni parallèles

7. L'ensemble des points tels que $x - y + 2z - 1 = 0$ et $-2x + 4y - 4z + 1 = 0$ est :
a) l'ensemble vide **b)** une droite **c)** un plan

Exercice 2 QCM2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne le point $S(1 ; -2 ; 0)$ et le plan P d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

$$\text{A} : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t \\ z = -3 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{B} : \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 1-3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{C} : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-2t \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{D} : \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = -3-3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

$$\text{A} : (-4\,;\,0\,;\,0) \quad \text{B} : \left(\frac{6}{5}\,;\,\frac{-9}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right) \quad \text{C} : \left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{-2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right) \quad \text{D}; \left(\frac{8}{11}\,;\,\frac{-25}{11}\,;\,\frac{9}{11}\right)$$

3. La distance du point S au plan P est égale à :

$$\text{A} : \frac{\sqrt{11}}{3} \quad \text{B} : \frac{3}{\sqrt{11}} \quad \text{C} : \frac{9}{\sqrt{11}} \quad \text{D} : \frac{9}{11}$$

4. On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère S et du plan P est égale
A : au point I$(1\,;\,-5\,;\,0)$
B : au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\dfrac{10}{11}}$
C : au cercle de centre S et de rayon $r = 2$
D : au cercle de centre H et de rayon $r = \dfrac{3\sqrt{10}}{11}$.

Exercice 3 QCM3

Pour chacune des 5 *propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.*

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère la droite (d) dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x = 2 - \dfrac{t}{2} \\ y = 1 \\ z = 5 - \dfrac{3t}{2} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

On note A le point de coordonnées $(2\,;\,-1\,;\,1)$, B le point de coordonnées $(4\,;\,-2\,;\,2)$ et C le point de (d) d'abscisse 1.

1. Proposition 1
« La droite (d) est parallèle à l'axe $\left(\text{O}\,;\,\vec{j}\right)$ ».

2. Proposition 2
« Le plan P d'équation $x + 3z - 5 = 0$ est le plan passant par A et orthogonal à (d) ».

3. Proposition 3
« La mesure de l'angle géométrique $\widehat{\text{BAC}}$ est $\dfrac{\pi}{3}$ radians ».

4. Soit G le barycentre des points pondérés $(\text{A}\,;\,-1)$, $(\text{B}\,;\,1)$ et $(\text{C}\,;\,1)$.
Proposition 4
« Les segments [AG] et [BC] ont le même milieu ».

5. Proposition 5 « La sphère de centre C et passant par B coupe le plan P d'équation $x + 3z - 5 = 0$ ».

Exercice 4 QCM4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points :
A de coordonnées $(3\,;\,1\,;\,-5)$, B de coordonnées $(0\,;\,4\,;\,-5)$, C de coordonnées $(-1\,;\,2\,;\,-5)$ et D de coordonnées $(2\,;\,3\,;\,4)$.

Pour chacune des six affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée. Le candidat doit indiquer sur sa copie le numéro de la question et la mention « VRAI » *ou* « FAUX ». *On attribue* 0,5 *point par réponse correcte et on retranche* 0,25 *point par réponse incorrect.*
L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Les points A, B et D sont alignés.

2. La droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne : $x + y = 4$.

3. Une équation cartésienne du plan (BCD) est : $18x - 9y - 5z + 11 = 0$.

4. Les points A, B, C et D sont coplanaires.

5. La sphère de centre A et de rayon 9 est tangente au plan (BCD).

6. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-2k \\ y & = & \dfrac{7}{2}+k, \\ z & = & -\dfrac{1}{2}-9k \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{R}$$

Exercice 5 QCM5

Première partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère :
– les points $A(0\,;0\,;3)$, $B(2\,;0\,;4)$, $C(-1\,;\,1\,;\,2)$ et $D(1\,;\,-4\,;\,0)$
– les plans $(P_1)\ :\ 7x+4y-3z+9=0$ et $(P_2) : x-2y=0$.
– les droites (Δ_1) et (Δ_2) définies par leurs systèmes d'équations paramétriques respectifs

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1+t \\ y & = & -8+2t \\ z & = & -10+5t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 7+2t' \\ y & = & 8+4t' \\ z & = & 8-t' \end{array}\right. \quad t' \in \mathbb{R}$$

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

	a.	b.	e.	d.
1. Le plan (P_1) est	Le plan (ABC)	Le plan (BCD)	Le plan (ACD)	Le plan (ABD)
2. La droite (Δ_1) contient	Le point A	Le point B	Le point C	Le point D
3. Position relative de (P_1) et de (Δ_2)	(Δ_1) est strictement parallèle a (P_1)	(Δ_1) est incluse dans (P_1)	(Δ_1) coupe (P_1)	(Δ_1) est orthogonale à (P_1)
4. Position relative de (Δ_1) et de (Δ_2)	(Δ_1) est strictement parallèle à (Δ_2)	(Δ_1) et (Δ_2) sont confondues	(Δ_1) et (Δ_2)) sont sécantes	(Δ_1) et (Δ_2) sont non coplanaires.
5. L'intersection de (P_1) et de (P_2) est une droite dont une représentation paramétrique est	$\begin{cases} x = t \\ y = -2+\frac{1}{2}t \\ z = 3t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3+6t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 5t \\ y = 1-2t \\ z = t \end{cases}$	$\begin{cases} x = -1+t \\ y = 2+t \\ z = -3t \end{cases}$

Deuxième partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormai $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère la droite (D) passant par A(0 ; 0 ; 3) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}$ (1 ; 0 ; −1) et la droite (D′) passant par B(2 ; 0 ; 4) et dont un vecteur directeur est $\vec{v}$ (0 : 1 ; 1).

L'objectif est de démontrer qu'il existe une droite unique perpendiculaire à la fois à (D) et à (D′), de la déterminer et de dégager une propriété de. cette droite.

1. On considère un point M appartenant à (D) et un point M′ appartenant à (D′). définis par $\overrightarrow{AM} = a\vec{u}$ et $\overrightarrow{BM'} = b\vec{v}$, où a et b sont de nombres réels.
   Exprimer les coordonnées de M, de M′ puis du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de a et b.
2. Démontrer que la droite (MM′) est perpendiculaire à (D) et à (D′) si et seulement si le couple (a ; b) est solution du système

$$\begin{cases} 2a+b = 1 \\ a+2b = -1 \end{cases}$$

3. Résoudre ce système. En déduire les coordonnées des deux uniques points M et M′, que nous noterons ici H et H', tels que la droite (HH′) soit bien perpendiculaire commune à (D) et à (D′). Montrer que HH′ = $\sqrt{3}$ unités de longueur.
4. On considère un point M quelconque de la droite (D) et un point M′ quelconque de la droite (D′).
   a) En utilisant les coordonnées obtenues à la question 1, démontrer que

$$MM'^2 = (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 + 3.$$

   b) En déduire que la distance MM′ est minimale lorsque M est en H et M′ est en H′.

Exercice 6 Distinguer l'affine du vectoriel

On considère deux réels a et b ainsi que les parties D et D′ de l'espace données par leurs équations dans un repère cartésien :

$$D : \begin{cases} x-z-a = 0 \\ y+3z+1 = 0 \end{cases} \quad \text{et } D' : \begin{cases} x+2y+z-2b = 0 \\ 3x+3y+2z-7 = 0 \end{cases}$$

Montrer que D et D′ sont des droites.

Exercice 7 Bac

L'espace est muni du repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Soient (P) et (P′) les plans d'équations respectives $x+2y-z+1=0$ et $-x+y+z=0$. Soit A le point de coordonnées (0 ; 1 ; 1).

1. Démontrer que les plans (P) et (P′) sont perpendiculaires.

2. Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}+t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

Démontrer que les plans (P) et (P′) se coupent selon la droite (d).

3. Calculer la distance du point A à chacun des plans (P) et (P′).

4. En déduire la distance du point A à la droite (d).

Exercice 8 Bac

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère les points A(3 ; 0 ; 6) et I(0 ; 0 ; 6), et l'on appelle (D) la droite passant par A et I.
On appelle (P) le plan d'équation $2y+z-6=0$ et (Q) le plan d'équation $y-2z+12=0$.

1. Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.

2. Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).

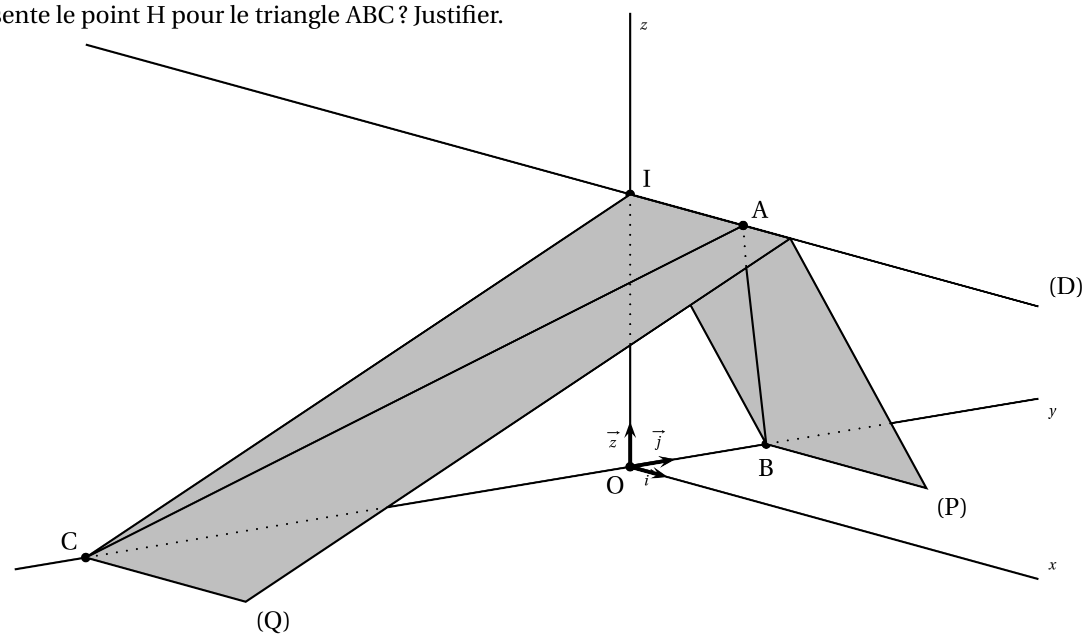
3. Démontrer que (P) et (Q) coupent l'axe $\left(O ; \vec{j}\right)$ et déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe $\left(O ; \vec{j}\right)$.

4. Démontrer qu'une équation du plan (T) passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ est

$$x+4y+2z-12=0.$$

5. Donner une représentation paramétrique de la droite (OA).
Démontrer que la droite (OA) et le plan (T) sont sécants en un point H dont on déterminera les coordonnées.

6. Que représente le point H pour le triangle ABC ? Justifier.



Exercice 9 Bac

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A\left(\frac{2}{3} ; -3 ; 2\right)$ et $B\left(-\frac{4}{3} ; 0 ; -4\right)$.
On note I le milieu du segment [AB] et (S) la sphère de diamètre [AB].

1. Soit E le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 1).

a) Calculer les coordonnées de E.

b) Montrer que l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|$ est le plan médiateur du segment [OE].

c) Montrer qu'une équation du plan (P) est $y=-1$.

2. a) Calculer le rayon de la sphère (S) et la distance du centre I de la sphère au plan (P). En déduire que l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) n'est pas vide.

b) Montrer qu'une équation de (C) dans le plan (P) est $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12$.
En déduire que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Soit D le point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}\ ;\ -\dfrac{1}{2}\ ;\ 4\sqrt{3}-1\right)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (ID).

b) En déduire que la droite (ID) est sécante au cercle (C) en un point noté F dont on donnera les coordonnées.

Exercice 10 Bac

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+y-2z+4=0$ et les points A de coordonnées (3 ; 2 ; 6), B de coordonnées (1 ; 2 ; 4), et C de coordonnées (4 ; −2 ; 5).

1. a) Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.

b) Vérifier que ce plan est le plan $\mathscr{P}$.

2. a) Montrer que le triangle ABC est rectangle.

b) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

c) Soit K le projeté orthogonal de O sur $\mathscr{P}$. Calculer la distance OK.

d) Calculer le volume du tétraèdre OABC.

3. On considère, dans cette question, le système de points pondérés

$$S = \{(O,\ 3),\ (A,\ 1),\ (B,\ 1),\ (C,\ 1)\}$$

a) Vérifier que ce système admet un barycentre, qu'on notera G.

b) On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).

c) Déterminer la distance de G au plan $\mathscr{P}$.

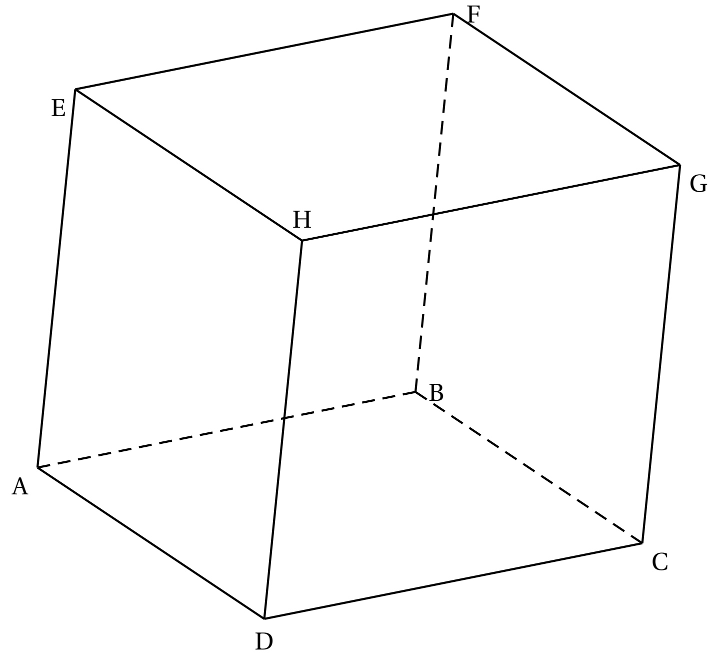
4. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5.$$

Déterminer Γ. Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à $\mathscr{P}$ et Γ ?

Exercice 11 Bac

On considère dans l'espace un cube de 3 cm de côté, noté ABCDEFGH et représenté ci-dessous.



Soit I le barycentre des points pondérés (E ; 2) et (F ; 1), J celui de (F ; 1) et (B ; 2) et enfin K celui de (G ; 2) et (C ; 1).

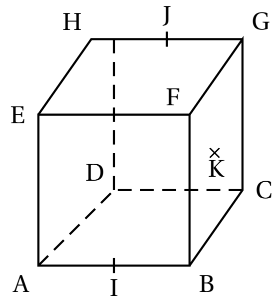
On veut déterminer l'ensemble des points M *équidistants de* I, J *et* K. *On note* Δ *cet ensemble.*

1. Placer les points l, J et K sur la figure de **l'annexe qui sera rendue avec la copie.**
2. Soit Ω le point de Δ situé dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK ?

   Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormal suivant : $\left(\mathrm{A}\,;\ \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\ ;\ \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
3. Donner les coordonnées des points l, J et K.
4. Soit P(2 ; 0 ; 0) et Q(1 ; 3 ; 3) deux points que l'on placera sur la figure. Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK).
5. Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$.
   a) Démontrer que M appartient à Δ si, et seulement si, le triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Δ ?
   b) Vérifier que P et Q appartiennent à Δ. Tracer Δ sur la figure.
6. a) Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.
   b) Déterminer alors les coordonnées exactes de Ω.

Exercice 12 Bac

Dans un cube ABCDEFGH, on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [GH]. K désigne le centre de la face BCGE. Les calculs seront effectués dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.



1. a. Démontrer que le quadrilatère DIFJ est un parallélogramme.
Établir que DIFJ est en fait un losange et montrer que l'aire de ce losange est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (DIJ).

En déduire une équation cartésienne de ce plan.

c. Déterminer la distance du point E au plan (DIJ), puis calculer le volume de la pyramide EDIFJ. On rappelle que le volume V d'une pyramide de hauteur h et de base correspondante $\mathscr{B}$ est donné par la formule suivante $V = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$.

2. Soit (Δ) la droite passant par E et orthogonale au plan (DIJ)

a) Donner une représentation paramétrique de (Δ) et prouver que K est un point de (Δ).

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de (Δ) et du plan (DIJ).

c) Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BEG.

3. Soit (S) l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - x + \dfrac{4}{3} = 0$.

a) Vérifier que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que L est un point de (S), Quelle propriété géométrique relative à (S) et au plan (DIJ) peut-un déduire de ce dernier résultat ?

Exercice 13 Bac

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
Soit (P_1) le plan d'équation cartésienne $-2x + y + z - 6 = 0$ et (P_2) le plan d'équation cartésienne $x - 2y + 4z - 9 = 0$.

1. Montrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.
On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2. Soit (D) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2).
Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est :

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

3. Soit M un point quelconque de (D) de paramètre t et soit A le point de coordonnées $(-9\,;\,-4\,;\,-1)$.

a) Vérifier que A n'appartient ni à (P_1), ni à (P_2).

b) Exprimer AM^2 en fonction de t.

c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2t^2 - 2t + 3$.

- Étudier les variations de f.
- Pour quel point M, la distance AM est-elle minimale ?
  Dans la suite, on désignera ce point par I.
- Préciser les coordonnées du point I.

4. Soit (Q) le plan orthogonal à (D) passant par A.

a) Déterminer une équation de (Q).

b) Démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (D).

Exercice 14 Résolution de systèmes

Dans l'espace muni d'un repère cartésien, on considère :

– les points $A(1,2,3)$ et $B(2,-1,2)$

– les droites affines $\mathscr{D}_1 : \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$ et $\mathscr{D}_2 : \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 3+5\lambda \end{cases}$

– les plans affines $\mathscr{P}_1 : \begin{cases} x = 1-2\lambda+3\mu \\ y = -2+\lambda+\mu \\ z = 4-\lambda-2\mu \end{cases}$, $\mathscr{P}_2 : 2x-y+3z-1=0$ et $\mathscr{P}_3 : x+2z-4=0$.

1. Montrer que $\mathscr{P}_1$ est bien un plan dont on donnera une équation cartésienne.

2. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et contenant $\mathscr{D}_1$.

3. Donner une représentation paramétrique de $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3$.

4. Donner une équation cartésienne du plan contenant $\mathscr{D}_1$ et tel que $\mathscr{D}_2$ lui soit parallèle.

5. Déterminer l'intersection de $\mathscr{P}_1$ et de la droite (AB).

Exercice 15 Distance d'un point à une droite

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les plans

$$P : x+y+z=3 \text{ et } P' : x-3y+2z=3$$

1. Établir le résultat classique : si $\mathscr{Q}$ est un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ dans un repère orthonormé, alors $d(M_0,\mathscr{Q}) = \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

2. Calculer alors la distance de l'origine à P, et la distance de l'origine à P′.

3. Montrer queP $\cap$ P′ est une droite. On la notera D.

4. Déduire du 2. la valeur de la distance de l'origine à D.

Exercice 16 Médiatrices et plans médiateurs

1. Dans l'Espace, quel est l'ensemble des points équidistants à deux points distincts donnés ?

2. Dans l'Espace, quel est l'ensemble des points équidistants à trois points distincts donnés ?

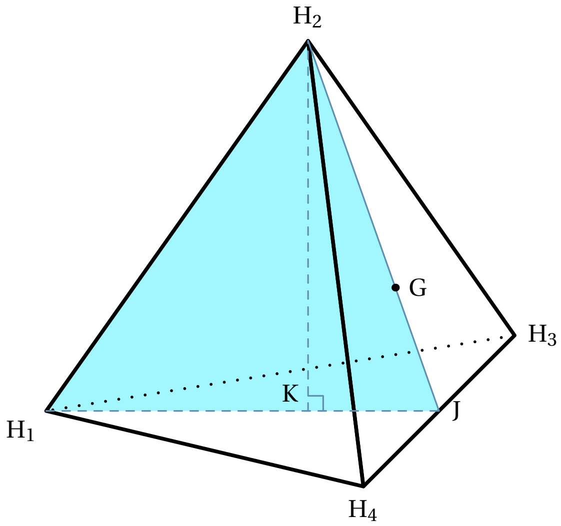
3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, montrer qu'il existe une unique sphère passant par les points

$$A(4,5,1) \ B(2,5,-5) \ C(-4,5,1) \ D(4,3,3)$$

On déterminera le centre et le rayon de cette sphère.

Exercice 17 Molécule de méthane

La molécule de méthane est constituée d'un atome de carbone et de quatre atomes d'hydrogène équidistants de l'atome de carbone et situés à égale distance l'un de l'autre.



J est le milieu du segment $[H_3, H_4]$, K est le projeté orthogonal de H_2 sur le plan $(H_1H_3H_4)$ et G est le centre de gravité du triangle $H_2H_3H_4$.

1. Montrer queK est le centre de gravité du triangle $H_1H_3H_4$.

2. En travaillant dans le plan H_1H_2K, calculer la distance H_2K.

3. En déduire le « volume » de la molécule.

4. Montrez que les arêtes opposées sont orthogonales.

5. Où est placé le point C représentant l'atome de carbone ?

6. Calculez la mesure de l'angle $\widehat{H_3CH_4}$.

Exercice 18 Barycentre, tétraèdre et paramètre

On considère le tétraèdre ABCD ; on note I milieu du segment [AB] et J celui de [CD].

1. a) Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés
$\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (C,\ -1)\ ;\ (D,\ 1)\}$.
Exprimez $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placez I, J et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).

b) Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (D,\ 2)\}$.
Démontrez que G_2 est le milieu du segment [ID]. Placez G_2.

c) Démontrez que IG_1DJ est un parallélogramme.
En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.

2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (C,\ m-2)\ ;\ (D,\ m)\}$.

a) Précisez l'ensemble $\mathscr{E}$ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.
Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.

b) Démontrez que G_m, appartient au plan (ICD).

c) Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.

d) En déduire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points G_m lorsque m décrit l'ensemble $\mathscr{E}$.

Exercice 19

L' espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

1. Déterminer une équation du plan P passant par le point A(1 ; 0 ; 1) et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. Soit P′ le plan d'équation $x+2y-z+1=0$ et M le point de coordonnées $(0\,;1\,;1)$.

a) Démontrer que les plans P et P′ sont perpendiculaires.

b) Calculer les distances d et d' du point M aux plans P et P′ respectivement.

3. a) Donner une représentation paramétrique de la droite D intersection des plans P et P′.

b) Déterminer les coordonnées du point H de D tel que la droite (MH) soit perpendiculaire à la droite D.

c) Vérifier que $\text{MH}^2 = d^2 + d'^2$.

Exercice 20 Distances

Dans l'espace muni du repère orthonormal $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$\text{A}(2\,;\,0\,;\,0),\quad \text{B}(-1\,;\,\sqrt{3}\,;\,0)\text{ et }\ \text{C}(-1\,;\,-\sqrt{3}\,;0)$$

1. Placer sur une figure les points A, B et C dans le plan $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral et que O est son centre.

3. a) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B.

b) Déterminer l'ensemble des points N de l'espace équidistants des points B et C.

c) En déduire que l'ensemble des points P de l'espace équidistants des points A, B et C est l'axe $\left(\text{O}\,;\,\vec{k}\right)$.

4. Montrer qu'il existe un unique point D dont la troisième coordonnée est positive tel que le tétraèdre ABCD soit régulier et calculer ses coordonnées.

5. Soit M un point quelconque du segment [CD]. On pose $\overrightarrow{\text{CM}} = \lambda\overrightarrow{\text{CD}}$ avec $\lambda \in [0\,;\,1]$.

a) Montrer que $\cos\widehat{\text{AMB}} = \dfrac{2\lambda^2-2\lambda+1}{2(\lambda^2-\lambda+1)}$.
On définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par la relation

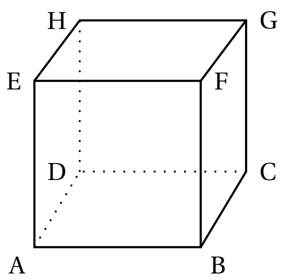
$$f(\lambda) = \frac{2\lambda^2-2\lambda+1}{2(\lambda^2-\lambda+1)} = 1 - \frac{1}{2(\lambda^2-\lambda+1)}$$

b) Étudier les variations de la fonction f.

c) En déduire la position de M pour laquelle l'angle $\widehat{\text{AMB}}$ est maximum.

d) Quelle est la valeur de ce maximum ?

Exercice 21 Dans un cube



Soit ABCDEFGH un cube de côté 1. On choisit le repère orthonormal $\left(\text{A}\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ avec $\vec{\imath} = \overrightarrow{\text{AB}}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{\text{AD}}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{\text{AE}}$.
On appelle I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments [BC], [CD], [DH], [HE], [EF] et [FB].

1. Déterminer les coordonnées des points I, K, M.

2. Montrer que les six points I, J, K, L, M et N sont coplanaires, dans un plan que l'on notera $\mathscr{P}$ (on donnera une équation du plan $\mathscr{P}$ dans le repère choisi).

3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

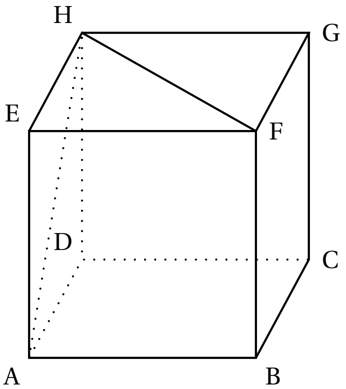
4. Montrer que les projetés orthogonaux des points I, J, K, L, M et N sur la droite (AG) sont confondus en un même point. On appellera T ce point.
Déterminer la position du point T sur le segment [AG].

5. Montrer que IJKLMN est un hexagone inscriptible dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon, et que tous ses côtés ont même longueur.

6. On considère la pyramide ayant pour base cet hexagone et pour sommet le point G.
Quelle fraction du volume du cube représente le volume de cette pyramide ?

Exercice 22 Produit scalaire

On considère un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur a (a réel strictement positif). Soit I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).



1. Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :
$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AF}$

2. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux.
On admettra de même que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux.

3. En déduire que le point I est le projeté orthogonal de E sur le plan (AFH).

4. a. Justifier les résultats suivants : les droites (AF) et (EH) sont orthogonales, ainsi que les droites (AF) et (EI).
b. En déduire que la droite (AF) est orthogonale à la droite (HI).
c. Établir de même que la droite (AH) est orthogonale à la droite (FI).
5. Que représente le point I pour le triangle AFH ?

Exercice 23 Volume d'un tétraèdre

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A, B, C et S de coordonnées respectives :

$$A(-1\,;\,0\,;\,1)\quad B(1\,;\,4\,;\,-1)\quad C(3\,;\,-4\,;\,-3)\quad S(4\,;\,0\,;\,4)$$

1. Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en A.

2. a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{SO}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

3. a) Démontrer que O est le barycentre des points A, B, C affectés de coefficients que l'on déterminera.

b) En déduire que O est situé dans le triangle ABC.

4. Calculer le volume V du tétraèdre SABC.

Exercice 24 Barycentre, tétraèdre et paramètre

On considère le tétraèdre ABCD ; on note I milieu du segment [AB] et J celui de [CD].

1. a) Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés
$\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (C,\ -1)\ ;\ (D,\ 1)\}$.
Exprimez $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placez I, J et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).

b) Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (D,\ 2)\}$.
Démontrez que G_2 est le milieu du segment [ID]. Placez G_2.

c) Démontrez que IG_1DJ est un parallélogramme.
En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.

2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (C,\ m-2)\ ;\ (D,\ m)\}$.

a) Précisez l'ensemble $\mathscr{E}$ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.
Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.

b) Démontrez que G_m, appartient au plan (ICD).

c) Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.

d) En déduire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points G_m lorsque m décrit l'ensemble $\mathscr{E}$.

Exercice 25 Tétraèdre forever

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$; on considère les points A(3 ; 0 ; 10), B(0 ; 0 ; 15) et C(0 ; 20 ; 0).

1. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

b) Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses au point E(9 ; 0 ; 0).

c) Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC.

a) Justifier que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OEH). En déduire que (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (OEH).

c) Vérifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne

$$20x + 9y + 12z - 180 = 0.$$

d) Montrer que le système $\begin{cases} x & = 0 \\ 4y - 3z & = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 & = 0 \end{cases}$ a une solution unique. Que représente cette solution ?

e) Calculer la distance OH, en déduire que EH = 15 et l'aire du triangle EBC.

3. En exprimant de deux façons le volume du tétraèdre OEBC, déterminer la distance du point O au plan (ABC). Pouvait-on prévoir le résultat à partir de l'équation obtenue en **2. c.** ?

Exercice 26 Section plane d'un tétraèdre

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On étudie le tétraèdre OABC, où les points A, B et C sont définis par leurs coordonnées : A(0, 0, 2), B($\sqrt{3}$, 1, 0) et C($\sqrt{3}$, −1, 0).

Partie A. Géométrie analytique dans un tétraèdre

1. a) Faire une figure représentant le repère et le tétraèdre.

b) Déterminer la nature géométrique et calculer les dimensions de chacune des faces du tétraèdre.

2. On considère le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\left(2 ; 0 ; \sqrt{3}\right)$.

a) Vérifier que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (ABC).

b) En déduire une équation du plan (ABC).

Partie B. Étude d'une section plane

Soit J le milieu de l'arête [BC]. Le point N est un point mobile du segment [OJ]. On appelle ($\mathscr{P}$) le plan passant par le point N et orthogonal à la droite (OJ).

1. On pose t = ON. Vérifier que t appartient à l'intervalle $\left[0 ; \sqrt{3}\right]$.

2. On se propose de déterminer la nature de la section plane du tétraèdre OABC par le plan ($\mathscr{P}$). Le plan ($\mathscr{P}$) coupe :
- l'arête [OC] au point R ;
- l'arête [AC] au point S ;
- l'arête [AB] au point T ;
- l'arête [OBI au point U.

a) Démontrer que les droites (ST), (BC) et (RU) sont parallèles. Démontrer que les droites (RS), (OA) et (TU) sont parallèles.

b) Démontrer que le quadrilatère RSTU est un rectangle.

c) Déterminer avec soin les dimensions du rectangle RSTU en fonction du nombre réel t.

3. a) Soit $S(t)$ l'aire de la section plane définie à la question **B. 2.**

Démontrer que $S(t) = \frac{4t}{3}\left(\sqrt{3} - t\right)$.

b) Étudier les variations de la fonction S, définie sur l'intervalle $\left[0 ; \sqrt{3}\right]$ par $S(t)$.

c) Pour quelle valeur du nombre réel t l'aire $S(t)$ est-elle maximale ?

Quelle est alors la nature géométrique particulière de la section plane étudiée ?

4. a) On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ du tétraèdre OABC est égal à l'intégrale $\int_0^{\sqrt{3}} S(t)\,dt$.

Calculer $\mathscr{V}$ par cette méthode.

b) Calculer $\mathscr{V}$ en utilisant l'aire d'une face et la hauteur correspondante du tétraèdre.

c) Vérifier la cohérence des deux résultats.

Exercice 27 Quatre-quarts breton et coordonnées barycentriques

Partie A *Préambule*

Définition Soient A, B et C trois points non alignés. Montrez que pour tout point M, il existe un unique triplet (α, β, γ) tel que

- ▷ M est le barycentre du système $\left\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\right\}$
- ▷ $\alpha + \beta + \gamma = 1$

On dit que α, β et γ sont les coordonnées barycentriques de M par rapport à A, B et C.

Système GPL Parmi les critères utilisés pour analyser la qualité de ce que nous mangeons, la répartition en glucides, protides et lipides fournit une première approche.

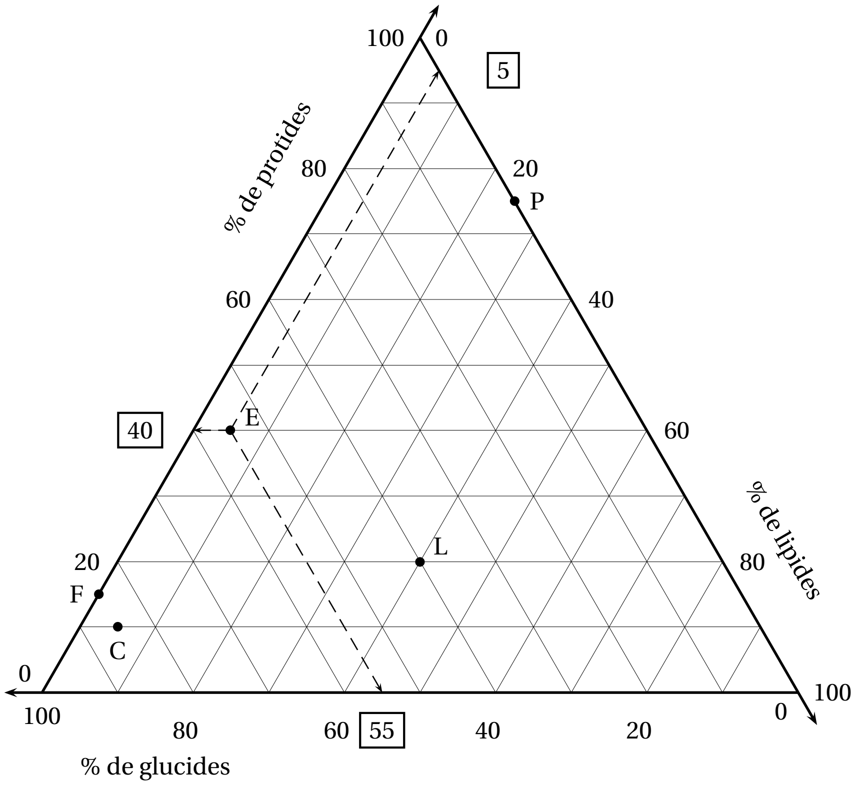
En effet les substances nutritives contenues dans un aliment se répartissent en trois groupes : les glucides (« sucres »), les protides (« matières azotées ») et les lipides (« graisses »).

À chaque aliment correspond donc une répartition en pourcentages.

Répartition (G ; P ; L) des aliments courants

	G	P	L		G	P	L
Riz	90	10	0	Haricots vert	75	25	0
Biscuits	80	10	10	Viande	0	50	50
Tarte aux pommes	75	5	20	Farine			
Chocolat	70	5	25	Confiture	98	2	0
Pâtes	90	10	0	Beurre, huile	0	0	100
Œuf	0	40	60	Épinards	55	40	5
Sucre	100	0	0	Poisson			
Pomme de terre	90	10	0	Pomme (fruit)	95	5	0
Pain	90	10	0	Lait			
Carotte				Miel	100	0	0
Fromage	0	50	50	Chou-fleur	70	25	5
Lentilles	75	25	0	Chou	60	35	5

Par exemple, les épinards contiennent 55 % de glucides, 40 % de protides et 5 % de lipides.



Le graphique ci-dessus est une carte des principaux aliments, c'est-à-dire un graphique où chaque aliment est représenté par un point.

Partie B *La « carte » des aliments*
Dans cette partie, on va dresser la carte des principaux aliments.
À titre d'exemple, le point E représentant les épinards a été dessiné.
On dira que E a pour « coordonnées » (55; 40; 5).
Pour lire les coordonnées (G; P; L) d'un point quelconque du graphique, on trace des parallèles aux axes passant par ce point.

1. On a figuré les points L, C, F et P représentant le lait, la carotte, la farine et le poisson.
   Quelles sont les proportions en glucides, protides et lipides :
   1. du lait ; 2. de la carotte ; 3. de la farine ; 4. du poisson.
2. Grâce au tableau ci-avant, placer les points suivants :
   1. O représentant l'œuf ;
   2. S représentant le sucre ;
   3. B représentant le beurre ;
   4. V représentant la viande.
3. Où seront situés les points représentant des aliments comportant :
   1. 10 % de protides ? 2. 50 % de glucides ? 3. 25 % de lipides ?

Partie C *La zone idéale*
On note G, P et L les proportions en pourcentages d'un aliment quelconque.
Dans la carte des aliments, on hachurera les régions qui ne conviennent pas.

1. Où se trouvent les aliments tels que :
   1. $P > 10$? 2. $G > 50$? 3. $L > 25$?
2. Les diététiciens ont établi que les proportions en glucides, protides et lipides les mieux adaptées à l'Homme vérifient :

$$\begin{cases} 550 < G < 60 \\ 10 < P < 20 \\ 25 < L < 35 \end{cases}$$

Déterminer la région correspondante du graphique.

3. Quels aliments se trouvent à l'intérieur de cette zone ?

Partie D *Où commence la cuisine ? Le gâteau breton « quatre-quarts »*
Le principe est le suivant : en mélangeant les aliments, arriver à ce que les proportions G, P et L du mélange soient dans la zone idéale.
La recette du « quatre-quarts » est simple : un quart de sucre, un quart de farine, un quart de beurre, un quart d'œuf (les quarts sont comptés en masses).

1. Quelles sont les coordonnées (G ; P ; L) du point Q représentant le « quatre-quarts » ?

2. On va donner une construction géométrique du point Q.

a) Quelles sont les coordonnées de M_1, le milieu de [BS] ?
Montrer que M_1 représente un mélange à parts égales de beurre et de sucre.

b) Quelles sont les coordonnées de M_2, le milieu de [FO] ?
Que peut-on dire de M_2 ?

c) En déduire une construction géométrique simple de Q.

3. Q n'est pas dans la zone idéale : comment peut-on modifier la recette pour qu'il y soit ?

Exercice 28 Fonctions-vecteurs...

Nous avons défini le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace $\mathscr{E}$ « avec les moyens du bord » du lycée. Vous découvrirez bientôt qu'on peut définir un produit scalaire de manière bien plus générale : c'est une « forme » (notons-la φ) qui « transforme » deux vecteurs en un réel et qui vérifie certaines propriétés

– φ est symétrique : $\varphi(u,v)=\varphi(v,u)$.
– φ est bilinéaire : $\varphi(\lambda u+\mu v,w)=\lambda\varphi(u,w)+\mu\varphi(v,w)$ avec λ et μ deux réels quelconques.
– φ est positive : $\varphi(u,u)\geqslant 0$.
– φ est définie : $\varphi(u,u)=0 \iff u=0$.

1. Vérifiez que le produit scalaire usuel est un produit scalaire.

2. On travaille maintenant dans l'ensemble E des fonctions continues de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Vérifiez que la fonction nulle appartient à E et que si f et g sont deux fonctions appartenant à E et λ et μ deux réels, alors $\lambda f+\mu g$ appartient encore à E (Vous direz un jour que E a une structure d'*espace vectoriel* et donc que ses éléments - ici des fonctions - sont des vecteurs).

b) On considère la « forme » φ qui à deux fonctions f et g de E associe le réel $\varphi(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$.
Montrez que φ est un produit scalaire sur E.

c) On peut, comme on l'a fait dans l'espace $\mathscr{E}$, définir l'*orthogonalité* de deux vecteurs : deux fonctions (vecteurs) f et g sont orthogonales si et seulement si $\varphi(f,g)=0$.
Soit k un entier. On note u_k la fonction qui à un réel x de $[-\pi,\pi]$ associe $u_k(x)=\cos(kx)$.
Calculez $\varphi(u_n,u_p)$ avec n et p deux entiers supérieurs à 1.

Exercice 29 Résolvons un système de 8 équations et 10 inconnues !...

Quand vous rencontrez le symbole (*), appelez votre professeur préféré et expliquez-lui vos résultats.
Définition et objectifs

Dans cet exercice, on appellera *carré magique* un tableau carré contenant 9 nombres réels, tel que les sommes des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales soient égales :

a	b	c
d	e	f
g	h	i

avec

$$\begin{array}{lll} a+b+c=S & a+d+g=S & a+e+i=S \\ d+e+f=S & \dots & c+e+g=S \\ g+h+i=S & \dots & \end{array}$$

où le nombre S s'appelle *la somme* du carré. [b]
Le but de l'exercice est de trouver *tous* les carrés magiques.
Voici une stratégie possible : le problème revient à résoudre un système de 8 équations linéaires à 10 inconnues, et on a des méthodes pour faire ça. Mais ça n'est pas très agréable : avec un peu d'astuce et de réflexion, on va essayer de diminuer le nombre de calculs.

Fabrication de quelques carrés magiques

1. Trouvez des exemples de carrés magiques les plus simples possibles. Essayez d'obtenir deux exemples « les plus différents possibles ».
2. Comment peut-on obtenir de nouveaux exemples à partir de carrés magiques connus ? Essayez de trouver le plus possible de tels procédés. (*)

Une réduction du problème

1. Montrez que tout carré magique peut se décomposer comme somme d'un carré magique constant (tous les coefficients sont égaux) et d'un carré magique de somme nulle.
2. Montrez que cette décomposition est unique.
3. Soient λ_1 et λ_2 deux réels et K_1 et K_2 deux carrés magiques. Vérifiez que si K_1 et K_2 sont constants, alors $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$ l'est aussi.

   Vérifiez que si K_1 et K_2 sont de somme nulle, alors $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$ l'est aussi.

   En quoi ceci permet-il de simplifier le problème ?

Résolution
On va chercher maintenant à déterminer tous les carrés magiques de somme nulle (répétons-le, en évitant de résoudre un « gros » système d'équations : il reste quand même 9 inconnues...).

1. En pratique, quand on essaie de construire un carré magique (de somme nulle), on commence par remplir quelques cases par des valeurs arbitraires (il y a bien sûr énormément de choix possibles), puis, au bout d'un moment, on n'a plus du tout le choix : la suite du remplissage du carré est entièrement déterminée par les valeurs choisies dans les premières cases. Donnez un ou plusieurs exemples de remplissages de quelques cases du carré qui forcent ainsi toute la suite du remplissage du carré.(*)
2. Choisissez l'un des schémas trouvés à la question précédente, et complétez dans le carré les cases restantes en fonction des cases présélectionnées. Obtient-on toujours ainsi un carré magique de somme nulle ? Sinon, que faut-il rajouter ?
3. À partir de la question précédente, exprimez tous les carrés magiques de somme nulle à partir de quelques carrés particuliers.

   Déduisez-en l'ensemble de tous les carrés magiques, sous la même forme. (*)

Quelques notions d'algèbre linéaire

Combien faut-il de coefficients, au minimum, pour exprimer l'ensemble des carrés magiques ?
Ce nombre minimum de paramètres à utiliser pour décrire un « espace vectoriel » s'appelle la *dimension* de l'espace vectoriel.
Donnez de même la dimension du « sous-espace vectoriel » des carrés magiques constants, puis celle des carrés magiques de somme nulle.
Les carrés magiques particuliers utilisés pour décrire l'ensemble de tous les éléments de l'espace vectoriel forment *une base* de l'espace vectoriel (à condition toutefois qu'on en ait pris le moins possible).
Quel lien y a-t-il entre une base et la dimension ?
Un espace vectoriel peut-il avoir plusieurs bases différentes ?(*)

En guise de conclusion

A quoi sert l'algèbre linéaire ? Malheureusement, il n'y a pas de réponse simple au niveau Terminale : en effet, la plupart des problèmes pour lesquels on pourrait utiliser l'algèbre linéaire peuvent aussi se résoudre de manière élémentaire, la plupart

[b] Les amateurs de casse-tête rajoutent d'autres types de conditions, ce qui change radicalement la nature du problème (et le rend bien plus difficile) : les coefficients doivent être des entiers distincts compris entre 1 et 9 par exemple.

du temps en resolvant un système d'équations ; et ceci peut donner l'impression qu'on remplace des calculs fastidieux mais simples par des arguments et des concepts très compliqués, très abstraits : donc, l'utilité en tant qu'*outil* n'est pas très claire (au lycée en tout cas !)

On peut quand même faire sentir l'intérêt de l'algèbre linéaire : celle-ci permet d'*unifier* des problèmes et des situations a priori très différentes, en donnant un cadre général dans lequel ces problèmes vont avoir le même aspect. Une telle démarche s'appelle *la méthode axiomatique*, et est fondamentale dans les mathématiques récentes.

Plus précisément, on commence par remarquer que l'on sait additionner deux vecteurs de l'Espace $\mathscr{E}$, ou deux fonctions, ou deux polynômes, deux intégrales ou deux suites de réels (comment ?...), ou deux carrés magiques ; et qu'on sait aussi multiplier chacun de ces objets par des réels.

Puisque ces objets (différents) peuvent subir le même type d'opération, ayant les mêmes propriétés formelles, les raisonnements ou les concepts qui utilisent uniquement ces opérations vont être valables dans chacun des six cadres cités. Par exemple, les notions de droite, de plan, de repère (on dira *base*), que l'on connaît déjà dans l'Espace $\mathscr{E}$, vont aussi être valables pour des espaces de fonctions ou de polynômes ! On pourra donc considérer une suite, une fonction continue sur $\mathbb{R}$, une intégrale, un carré magique comme autant de vecteurs...

Ce point de vue donne également un support géométrique, et permet de visualiser les objets : dans l'exercice, l'ensemble des carrés magiques s'avère être un espace vectoriel de dimension 3, ce qui permettra d'y faire exactement les mêmes opérations et les même raisonnements que dans l'Espace $\mathscr{E}$ avec ses plans et ses droites, que l'on « voit » beaucoup mieux que l'espace des carrés magiques.

Même si le lycée n'en donne qu'un tout petit aperçu, la quantité de situations qui peuvent être modélisées par l'algèbre linéaire est immense, et va de questions purement mathématiques jusqu'à des problèmes très concrets d'écologie (dynamique des populations), de météorologie, d'économie, de physique, d'informatique...

VI - Quelques corrigés

Solution 1

1. (P) a pour équation cartésienne : $x+2y-z+1=0$. Un vecteur normal à (P) est : $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

   (P') a pour équation cartésienne : $-x+y+z=0$. Un vecteur normal à (P) est : $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

   Alors : $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'}=(1\times(-1))+(2\times 1)+(-1\times 1)=-1+2-1=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux. Les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.
2. Les deux plans étant perpendiculaires, ils se coupent selon une droite (d). Les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ des points de (d) vérifient les deux équations des plans et sont solutions du système formé par ces deux équations
   $\begin{cases} x+2y-z+1 &= 0\\ -x+y+z &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=z-1 &= 0\\ -x+y &= -z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y &= -z\\ 3y &= -1\end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} x &= -\dfrac{1}{3}+t\\ y &= -\dfrac{1}{3}\\ z &= t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ qui est la représentation paramétrique de (d) donnée dans le texte.
3. Pour un plan d'équation (P) cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et un point $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\ ;\ y_\mathrm{A}\ ;\ z_\mathrm{A})$, la distance entre A et (P) est : d(A ; (P))= $\dfrac{|ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
   On en déduit : d(A ; (P))= $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ et d(A ; (P'))= $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
   Notons H et H' les projetés orthogonaux de A sur (P) et sur (P'). Comme les deux plans (P) et (P') sont orthogonaux, le projeté orthogonal de H sur (P') est cofondu avec le projeté orthogonal de H' sur (P). Le quadrilatère AHDH' est donc un rectangle. Soit δ la distance entre A et (d). δ est la longueur de la diagonale de ce rectangle. On applique le théorème de Pythagore : $\delta^2=\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}=2$. D'où $\delta=\sqrt{2}$.

Solution 2

1. Les plans (P) et (Q) ont pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}\,(0;2;1)$ et $\overrightarrow{n'}\,(0\ ;\ 1\ ;\ -2)$. On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n'}=0$, donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{n'}$ et par suite, les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
2. L'intersection des plans (P) et (Q) est une droite (plans perpendiculaires).
   $\mathrm{A}\in(\mathrm{P})$ car $2\times 0+6-6=0$ et $\mathrm{A}\in(\mathrm{Q})$ car $0-12+12=0$, donc $\mathrm{A}\in(\mathrm{P})\cap(\mathrm{Q})$;
   on montre de la même façon que $\mathrm{I}\in(\mathrm{P})\cap(\mathrm{Q})$.
   Les points A et I étant distincts, la droite d'intersection des plans (P) et (Q) est donc la droite (AI), c'est-à-dire la droite (D).
3. Soit $\mathrm{M}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point de l'espace. M appartient à l'axe $\left(\mathrm{O};\overrightarrow{j}\right)$ si et seulement si $\begin{cases} x &= 0\\ z &= 0\end{cases}$.

   M appartient à l'axe $\left(\mathrm{O};\overrightarrow{j}\right)$ et au plan (P) si et seulement si $\begin{cases} x &= 0\\ z &= 0\\ 2y+z-6 &= 0\end{cases}$ c'est-à-dire si et seulement si $\begin{cases} x &= 0\\ y &= 3\\ z &= 0\end{cases}$. Le plan (P) coupe donc l'axe $\left(\mathrm{O};\overrightarrow{j}\right)$ au point B(0 ; 3 ; 0).

   Un raisonnement analogue montre que le plan (Q) coupe l'axe $\left(\mathrm{O};\overrightarrow{j}\right)$ en un point C(0 ; −12 ; 0).
4. On a $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(-3\ ;\ -12\ ;\ -6)$ donc le plan (T) a une équation cartésienne de la forme : $-3x-12y-6z+d=0$. Et $\mathrm{B}(0\ ;\ 3\ ;0)\in(\mathrm{T})$, donc $0-12\times 3-0+d=0$, d'où $d=36$. Le plan (T) a donc pour équation cartésienne $-3x-12y-6z+36=0$, ou encore, en simplifiant par -3 : $x+4y+2z-12=0$.
5. La droite (OA) passe par O(0 ; 0 ; 0) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,(3\ ;\ 0\ ;\ 6)$. Une représentation paramétrique de (OA) est donc :
   $\begin{cases} x &= 3t\\ y &= 0 \quad (t\in\mathbb{R})\\ z &= 6t\end{cases}$.

Un point M appartient à la droite (OA) et au plan (T) si et seulement si il existe un réel t tel que $M(3t\ ;\ 0\ ;\ 6t)$ et $(3t)+4\times 0+2\times(6t)-12=0$, ce qui donne une unique valeur : $t=\dfrac{4}{5}$. La droite (OA) et le plan (T) sont donc sécants en un point H qui a pour coordonnées $\left(3\times\dfrac{4}{5}\ ;\ 0\ ;\ 6\times\dfrac{4}{5}\right)$, c'est-à-dire $H\left(\dfrac{12}{5}\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{24}{5}\right)$.

6. Les points B et H appartiennent au plan (T) qui a pour vecteur normal $\overrightarrow{OA}$, donc $(BH)\perp(AC)$: le point H appartient à la hauteur issue de B du triangle ABC.
$\overrightarrow{AH}\left(-\dfrac{3}{5};0;-\dfrac{6}{5}\right)$ et $\overrightarrow{BC}\,(0\ ;\ -15\ ;\ 0)$, donc $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ et $(AH)\perp(BC)$: le point H appartient donc à la hauteur issue de A du triangle ABC.
Le point H est donc l'orthocentre du triangle ABC.

Solution 3

1. a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\,(-2\ ;\ 0\ ;\ -2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(1\ ;\ -4\ ;\ -1)$. Ils ne sont manifestement pas colinéaires. Conclusion : les trois points A, B et C définissent un plan.

b) $A\in\mathscr{P}\iff 2\times3+2-2\times6+4=0$ est vrai ;
$B\in\mathscr{P}\iff 2\times1+2-2\times4+4=0$ est vrai ;
$C\in\mathscr{P}\iff 2\times4+(-2)-2\times5+4=0$ est vrai.
Le plan $\mathscr{P}$ est donc bien le plan (ABC).

2. a) D'après 1., $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\times1+0\times(-4)+(-2)\times(-1)=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc orthogonaux, les droites (AB) et (AC) perpendiculaires. Conclusion : le triangle ABC est rectangle en A.

b) Le vecteur $\overrightarrow{n}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est un vecteur normal au plan d'équation $ax+by+cz=d=0$. Ici le vecteur $\overrightarrow{n}\,(2\ ;\ 1\ ;\ -2)$, vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est donc un vecteur directeur de la droite (Δ). Si $M\in(\Delta)$ alors $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{n}$. Cette égalité vectorielle se traduit par le système :

$$\begin{cases} x &= 2\lambda\\ y &= \lambda\\ z &= -2\lambda\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

c) Puisque $(KO)\perp\mathscr{P}$, $(KO)=\Delta$. Le point K est commun à (Δ) et à $\mathscr{P}$. En utilisant la question précédente, on a $2x_K+y_K-2z_K+4=0\iff 2\times\lambda+\lambda-2\times(-2\lambda)+4=0\iff 9\lambda+4=0\iff\lambda=-\dfrac{4}{9}$.
Conclusion : les coordonnées de K sont donc $\left(-\dfrac{8}{9}\ ;\ -\dfrac{4}{9}\ ;\ \dfrac{8}{9}\right)$.
Donc $OK^2=\left(-\dfrac{8}{9}\right)^2+\left(-\dfrac{8}{9}\right)^2+\left(-\dfrac{8}{9}\right)^2=\dfrac{64}{81}+\dfrac{16}{81}+\dfrac{64}{81}=\dfrac{144}{81}=\dfrac{16}{9}$. Conclusion : $OK=\dfrac{4}{3}$.

d) On prend pour base (ABC) et la hauteur est donc [OK]. D'après 1., $AB^2=4+4=8$, donc $AB=2\sqrt{2}$; $AC^2=1+16+1=18$, donc $AC=3\sqrt{2}$.
L'aire du triangle rectangle ABC est : $\dfrac{AB\times AC}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}{2}=6$.
Donc $V(OABC)=\dfrac{6\times OK}{3}=\dfrac{6\times\frac{4}{3}}{3}=\dfrac{8}{3}$.

3. a) Le barycentre G existe car la somme des coefficients $3+1+1+1$ est non nulle. Il est tel que $3\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

b) I centre de gravité du triangle ABC est l'isobarycentre du système de points pondérés {(A, 1),(B, 1),(C, 1)}.
D'après l'associativité du barycentre, G est le barycentre (plus précisement l'isobarycentre) du système de points pondérés {(O, 3), (I, 3)}. G est donc le milieu de [OI], donc appartient à la droite (OI).

c) On sait que $\overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$. Les coordonnées de I sont donc $\left(\dfrac{8}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{15}{3}\right)$. Celles de G : $\left(\dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)$.
La distance de G au plan $\mathscr{P}$ est donnée par

$$d(G,\mathscr{P})=\frac{|2x_G+y_G-2z_G+4|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{\left|\frac{8}{3}+\frac{1}{3}-5\right|}{3}=\frac{2}{3}.$$

4. En utilisant la relation de Chasles $3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}+3\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}=6\overrightarrow{MG}$, par définition du barycentre.
On a donc $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5.\iff\left\|6\overrightarrow{MG}\right\|=5\iff GM=\dfrac{5}{6}$.
L'ensemble Γ est donc la spère de centre G et de rayon $\dfrac{5}{6}$.
D'après la question 3 c, la distance de G au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{6}<\dfrac{5}{6}$. Le plan $\mathscr{P}$ et la spère Γ sont donc sécants : l'intersection est un cercle.

Solution 4
Première partie

1. $A\in(P_1) \iff -9+9=0$: vrai ;
$B\in(P_1) \iff 14-12+9=0$: faux ;
$C\in(P_1) \iff -7+4-6+9=0$ vrai ;
$D\in(P_1) \iff 7-16+9=0$: vrai.
$\overrightarrow{AC}(-1\,;\,1\,;\,-1)$, $\overrightarrow{AD}(1\,;\,-4\,\,-3)$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc (P_1) est le plan (ACD).

2. $A\in(\Delta_1) \iff \begin{cases} 0 &= -1+t \\ 0 &= -8+2t \\ 3 &= -10+5t \end{cases} \Rightarrow t=1$ et $t=4$. Pas de solution. Donc faux ;
$B\in(\Delta_1) \iff \begin{cases} 2 &= -1+t \\ 0 &= -8+2t \\ 4 &= -10+5t \end{cases} \Rightarrow t=3$ et $t=4$. Pas de solution. Donc faux ;
$C\in(\Delta_1) \iff \begin{cases} 1 &= -1+t \\ 1 &= -8+2t \\ 2 &= -10+5t \end{cases} \Rightarrow t=2$ et $t=4,5$. Pas de solution. Donc faux ;
$D\in(\Delta_1) \iff \begin{cases} 1 &= -1+t \\ -4 &= -8+2t \\ 0 &= -10+5t \end{cases} \Rightarrow t=2$ et $t=2$ et $t=2$. Donc vrai ;

3. Un vecteur $\vec{u}$ directeur de la droite (Δ_1) a pour coordonnées $\vec{u}(1\,;\,2\,;\,5)$. $\vec{v}(7\,;\,4\,;\,-3)$ est un vecteur normal au plan (P_1).
Or $\vec{u}\cdot\vec{v}=7+8-15=0$. La droite (Δ_1) est parallèle au plan (P_1). Or en 1 et 2 on a trouvé que D est un point de (Δ_1) et de (P_1). Donc la droite (Δ_1) est incluse dans (P_1).

4. Un point commun à (Δ_1) et (Δ_2) a ses coordonnées qui vérifient le système :
$$\begin{cases} -1+t &= 7+2t' \\ -8+2t &= 8+4t' \\ -10+5t &= 8-t' \end{cases} \iff \begin{cases} t-2 &= 8 \\ t-2 &= 8 \\ 5t+t' &= 18 \end{cases} \iff \begin{cases} t &= 4 \\ t' &= -2 \end{cases}$$
On obtient donc une solution unique qui donne comme coordonnées $(3\,;\,0\,;\,10)$.
Les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont sécantes (et donc complanaires).

5. Un point commun aux deux plans a ses coordonnées qui vérifient le système : $\begin{cases} 7x+4y-3z+9 &= 0 \\ x-2y &= 0 \end{cases}$
En posant $y=t$, on obtient le système équivalent : $\begin{cases} y &= t \\ 7x+4t-3z+9 &= 0 \\ x &= 2t \end{cases} \iff \begin{cases} y &= t \\ x &= 2t \\ z &= 6t+3 \end{cases}$ La bonne réponse est la deuxième.

Deuxième partie

1. On traduit pour un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AM}=a\vec{u} \iff \begin{cases} x-0 &= a \\ y-0 &= 0 \\ z-3 &= -a \end{cases}$
On a donc $M(a\,;\,0\,;\,3-a)$.
De même $\overrightarrow{BM'}=b\vec{v} \iff \begin{cases} x'-2 &= 0 \\ y'-0 &= b \\ z'-4 &= b \end{cases}$.
On a donc $M'(2\,;\,b\,;\,4+b)$.
Il s'ensuit que $\overrightarrow{MM'}(2-a\,;\,b\,;\,a+b+1)$.

2. La droite (MM') est perpendiculaire à (D) et à (D′) si et seulement si :
$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'}\cdot\vec{u} &= 0 \\ \overrightarrow{MM'}\cdot\vec{v} &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2-a-a-b-1 &= =0 \\ b+a+b+1 &= =0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+b &= 1 \\ a+2b &= -1 \end{cases}$$

3. $\begin{cases} 2a+b = 1 \\ a+2b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 4a+2b = 2 \\ a+2b = -1 \end{cases} \Rightarrow 3a = 3 \iff a = 1$. On en déduit que $b = -1$.
On a donc $H(1\,;\,0\,;\,2)$ et $H'(2\,;\,-1\,;\,3)$.
On calcule $HH'^2 = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3 \iff HH' = \sqrt{3}$.

4. a) Avec $M(a\,;\,0\,;\,3-a)$ et $M'(2\,;\,b\,;\,4+b)$, on calcule $MM'^2 = \|\overrightarrow{MM'}\|^2 = (2-a)^2+b^2+(a+b+1)^2 = 4-a^2-4a+b^2+a^2+b^2+1+2a+2b+2ab = 2a^2+2b^2-2a+2b+2ab+5 = a^2+b^2+2aba^2+1-2a+b^2+2b+1+3$.
Soit enfin $MM'^2 = (a+b)^2+(a-1)^2+(b+1)^2+3$.

b) Les trois premiers termes de la somme précédente sont des carrés dont la plus peitie valeur est 0. On a donc $MM'^2 \geqslant 3$ et cette valeur 3 est atteinte lorsque les trois carrés sont nuls, c'est-à-dire quand $\begin{cases} a+b = 0 \\ a-1 = 0 \\ b+1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b = 0 \\ a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$
On retrouve donc les valeurs $a = 1$ et $b = -1$ et la distance (la plus courte) entre les deux droites : elle vaut $\sqrt{3}$.

Solution 5

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\2\\9\end{pmatrix}$. Il n'existe pas de réel α tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AD}$. Les points A, B et D ne sont pas alignés.

2. Les égalités $3+1=4$ et $0+4=4$ sont vraies ; les points A et B appartiennent au plan. Donc la droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne : $x+y=4$.

3. Les coordonnées des trois points vérifient l'équation. L'équation proposée est bien celle du plan (BCD), ces trois points étant manifestement disjoints deux à deux.

4. Les coordonnées de A ne vérifient pas l'équation précédente. Donc A n'appartient pas au plan (BCD). Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

5. La sphère de centre A et de rayon 9 est tangente au plan (BCD) si et seulement si la distance de A à ce plan est égale au rayon du cercle, c.à.d si $d(\mathrm{A},\ (\mathrm{BCD})) = \dfrac{81}{\sqrt{18^2+9^2+5^2}} = 9 \iff \dfrac{81}{\sqrt{430}} = 9$ qui est une égalité fausse. La proposition est fausse.

6. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est obtenue en traduisant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{BD}$ qui se traduit par le système : $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 4-\lambda \\ z = -5-5\lambda \end{cases}$ qui se traduit en posant $2\lambda = 1-2k \iff \lambda = \dfrac{1}{2}-k$ par le système proposé par l'énoncé. La proposition est vraie.

Solution 6

1. Un vecteur $\vec{n}_1$ normal à (P_1) est $\vec{n}_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$. Un vecteur $\vec{n}_2$ normal à (P_2) est $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs sont non nuls et $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = -2\times1+1\times(-2)+1\times4 = 0$. Ces vecteurs étant orthogonaux, les deux plans sont perpendiculaires.

2. En posant $z = t$ les coordonnées de la droite commune aux deux plans vérifient $\begin{cases} -2x+y = 6-t \\ x-2y = 9-4t \end{cases} \iff \begin{cases} -2x+y = 6-t \\ 2x-4y = 18-8t \end{cases} \Rightarrow -3y = 24-9t \iff y = -8+3t$ et en reportant dans l'une des équations des plans $x = -7+2t$.
Conclusion : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (P_1 \cap (P_2) = (D \iff \begin{cases} x = -7+2t \\ y = -8+3t \\ z = t \end{cases}$.

3. a) On a $-18-4-1-6=0$ Faux et $-9+8-4-9=0$ Faux

b) $AM^2 = (x+9)^2+(y+4)^2+(z+1)^2 = (2+2t)^2+(-4+3t)^2+(t+1)^2 = 14t^2-14t+21 = 7\left(2t^2-2t+3\right)$.

c) $f(t) = 2t^2-2t+3 = 2\left(t^2-t+\dfrac{3}{2}\right) = 2\left[\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}\right] = 2\left[\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}\right] \geqslant 2\times\dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{2} > 0$. Ce trinôme est donc décroissant sur $]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}]$, croissant sur $[\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty[$ et a un minimum en $\dfrac{1}{2}$.
Le point correspondant est $M_{mini} = I\left(-6\,;\,-\dfrac{13}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

4. a) La représentation paramétrique de (D) donne les coordonnées d'un vecteur directeur de (D), donc un vecteur normal à (Q), c'est le vecteur $\vec{q}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$.

Une équation de (Q) est donc : $2x+3y+z+\alpha=0$. $A \in (Q) \iff$
$-18-12-1+\alpha=0 \iff \alpha=31$.
Une équation de (Q) est donc : $M \in (Q) \iff 2x+3y+z+31=0$.

b) Le triangle AMI est rectangle en I. Le côté [AI] a une longueur inférieure à celle de l'hypoténuse [AM] : I est bien le projeté orthogonal de A sur (D) .