Ensembles : une approche fonctionnelle

INFO1 - Semaine 37

Guillaume CONNAN

IUT de Nantes - Dpt d'informatique

Dernière mise à jour : 2 septembre 2012

Sommaire

Sommaire

Définition 1

Un ensemble d'*éléments* est :

- soit l'ensemble vide, noté $\{\}$ (ou bien $\emptyset$) ;
- soit construit en « ajoutant » un élément x à un ensemble E. On notera alors cette opération $x \oplus E$.

Définition 1

Un ensemble d'*éléments* est :

- soit l'ensemble vide, noté $\{\}$ (ou bien $\emptyset$) ;
- soit construit en « ajoutant » un élément x à un ensemble E. On notera alors cette opération $x \oplus E$.

Définition 1

Un ensemble d'*éléments* est :

- soit l'ensemble vide, noté $\{\}$ (ou bien $\emptyset$) ;
- soit construit en « ajoutant » un élément x à un ensemble E. On notera alors cette opération $x \oplus E$.

```
type 'a ens =
  | Vide
  | Ens of ('a * 'a ens);;
```

```
# Ens(1,Vide);;
- : int ens = Ens (1, Vide)
# Ens(3,Ens(2,Ens(1,Vide)));;
- : int ens = Ens (3, Ens (2, Ens (1, Vide)))
# let e = Ens(3,Ens(2,Ens(1,Vide)));;
val e : int ens = Ens (3, Ens (2, Ens (1, Vide)))
# Ens(4,e);;
- : int ens = Ens (4, Ens (3, Ens (2, Ens (1, Vide))))
```

Sommaire

Définition 2 (Axiome d'extensionnalité)

Deux ensembles A et B sont égaux si, et seulement si, ils contiennent les mêmes éléments. On écrit alors $A = B$.

$$x \oplus \left(y \oplus \{\}\right) = x \oplus \{y\} = \{x, y\}$$

Exercice 1

On considère les ensembles :

$E_1 = \{a, b, c\}$, $E_2 = \{b, c, a\}$, $E_3 = \{b, a, a, c, b\}$, $E_4 = \{c, c, c, a, b, a, c, b, b, b\}$,
$E_5 = c \oplus E_2$.

Quels sont, parmi ces ensembles, ceux qui sont égaux ?

Sommaire

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{VRAI, FAUX\}$$

Prédicat

$$P(x) = (x^2 = 2)$$

$$\forall$$

$$R(x) = (x^2 = 4)$$

$$\exists$$

$$\mathcal{B}_2 = \{VRAI, FAUX\}$$

Prédicat

$$P(x) = (x^2 = 2)$$

$$\forall$$

$$R(x) = (x^2 = 4)$$

$$\exists$$

$$\mathcal{B}_2 = \{VRAI, FAUX\}$$

Prédicat

$$P(x) = (x^2 = 2)$$

$$\forall$$

$$R(x) = (x^2 = 4)$$

$$\exists$$

$$\mathcal{B}_2 = \{VRAI, FAUX\}$$

Prédicat

$$P(x) = (x^2 = 2)$$

$$\forall$$

$$R(x) = (x^2 = 4)$$

$$\exists$$

$$\mathcal{B}_2 = \{VRAI, FAUX\}$$

Prédicat

$$P(x) = (x^2 = 2)$$

$$\forall$$

$$R(x) = (x^2 = 4)$$

$$\exists$$

$$\mathcal{B}_2 = \{VRAI, FAUX\}$$

Prédicat

$$P(x) = (x^2 = 2)$$

$$\forall$$

$$R(x) = (x^2 = 4)$$

$$\exists$$

Entiers impairs ?

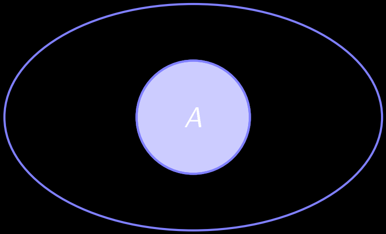
Exercice 2

On note $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}\ ET\ x^2 = 1\}$ *et* $F = \{x \mid x \in \mathbb{R}\ ET\ |x| = 1\}$.
Que pouvez-vous dire de E par rapport à F ?

Entiers impairs ?

Sommaire

$A \subseteq B$



Sommaire

$X \in \mathcal{P}(E)$ si, et seulement si, $X \subseteq E$

Il suffit de remarquer que si $E = \{\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \left\{\{\}\right\}$.

Sinon, on peut écrire E sous la forme $x \oplus F$ avec x un élément quelconque de E.

$\mathcal{P}(E)$ est alors l'union de $\mathcal{P}(F)$ et des éléments de $\mathcal{P}(F)$ auxquels on a ajouté x...

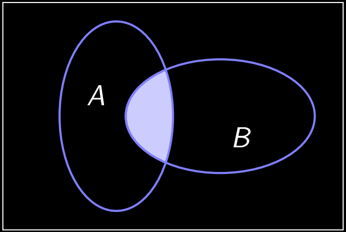
Il suffit de remarquer que si $E = \{\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \Big\{\{\}\Big\}$.

Sinon, on peut écrire E sous la forme $x \oplus F$ avec x un élément quelconque de E.

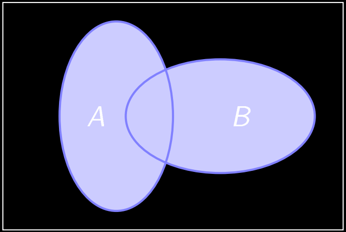
$\mathcal{P}(E)$ est alors l'union de $\mathcal{P}(F)$ et des éléments de $\mathcal{P}(F)$ auxquels on a ajouté x…

Il suffit de remarquer que si $E = \{\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \left\{\{\}\right\}$.
Sinon, on peut écrire E sous la forme $x \oplus F$ avec x un élément quelconque de E.
$\mathcal{P}(E)$ est alors l'union de $\mathcal{P}(F)$ et des éléments de $\mathcal{P}(F)$ auxquels on a ajouté x...

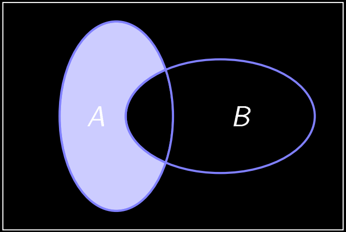
Sommaire



$A \cap B$



$A \cup B$

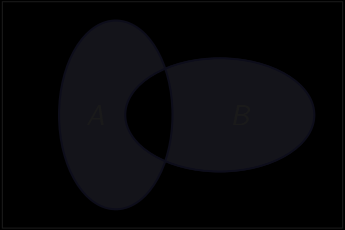


$A \setminus B$

Définition 3

La **différence symétrique** des ensembles A et B est l'ensemble :

$$
\begin{aligned}
A \triangle B &= \left\{ x \in E \mid x \in A \setminus B \text{ ou } x \in B \setminus A \right\} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
A \triangle B &= \left\{ x \in E \mid x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B \right\} = (A \cup B) \setminus (A \cap B)
\end{aligned}
$$



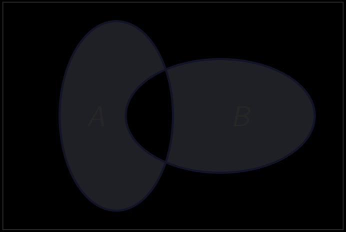
$A \triangle B$

Définition 3

La **différence symétrique** des ensembles A et B est l'ensemble :

$$A \triangle B = \left\{x \in E \mid x \in A \setminus B \text{ ou } x \in B \setminus A\right\} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$A \triangle B = \left\{x \in E \mid x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B\right\} = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



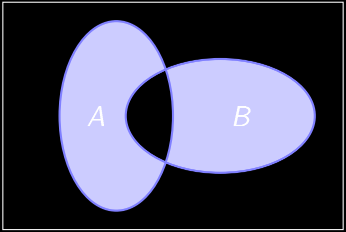
$A \triangle B$

Définition 3

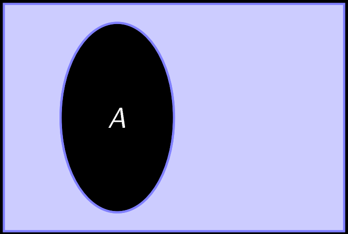
La **différence symétrique** des ensembles A et B est l'ensemble :

$$A \triangle B = \left\{ x \in E \mid x \in A \setminus B \text{ ou } x \in B \setminus A \right\} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$A \triangle B = \left\{ x \in E \mid x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B \right\} = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



$A \triangle B$



$\complement_E A$

Théorème 4 (Lois de De Morgan)

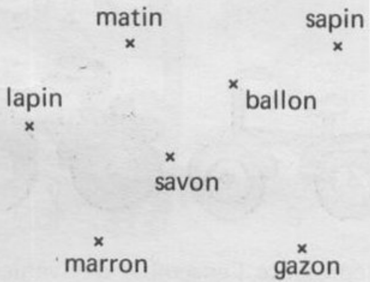
$$\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \qquad \textit{et} \qquad \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

Idempotence	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Associativité	$(A \cup B) \cup C =$ $A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C =$ $A \cup (B \cap C)$
Commutativité	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Distributivité	$A \cup (B \cap C) =$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) =$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identité	$A \cup \{\} = A$	$A \cap E = A$
Involution	$\overline{\overline{A}} = A$	
Complémentaire	$A \cup \overline{A} = E$ $\overline{E} = \{\}$	$A \cap \overline{A} = \{\}$ $\overline{\{\}} = E$
De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Sommaire

Recopie les mots.
Entoure en rouge l'ensemble C des mots où tu entends le son **in**.
Entoure en vert l'ensemble D des mots où tu entends le son **on**.
Entoure en bleu l'ensemble E des mots où tu entends le son **a**

Que peux-tu dire de l'ensemble E ?
(fais une phrase où tu utiliseras E, C, D).



Exercice 3

Ce qui va nous intéresser informatiquement, c'est une fonction qui crée une partition d'un ensemble selon une propriété, par exemple pour regrouper les entiers pairs parmi les entiers de 0 à 10 dans un ensemble et les autres entiers dans un deuxième ensemble.
À vous de l'imaginer, récursivement bien sûr !

Sommaire

Définition 5

Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E on définit la fonction caractéristique $\mathbb{1}_A$ de A dans E par :

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0;1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Sommaire

- l'ensemble des entrées :

$$E = \{\text{Cuisses de sauterelles panées, œuf mou, huîtres de l'Erdre}\}$$

- l'ensemble des plats de résistance :

$$P = \{\text{Turbot à l'huile de ricin, Chien à l'andalouse, Soupe d'orties}\}$$

- l'ensemble des desserts :

$$D = \{\text{Pomme}, \text{Banane}, \text{Noix}\}$$

- l'ensemble des entrées :

$$E = \{\text{Cuisses de sauterelles panées, œuf mou, huîtres de l'Erdre}\}$$

- l'ensemble des plats de résistance :

$$P = \{\text{Turbot à l'huile de ricin, Chien à l'andalouse, Soupe d'orties}\}$$

- l'ensemble des desserts :

$$D = \{\text{Pomme}, \text{Banane}, \text{Noix}\}$$

- l'ensemble des entrées :

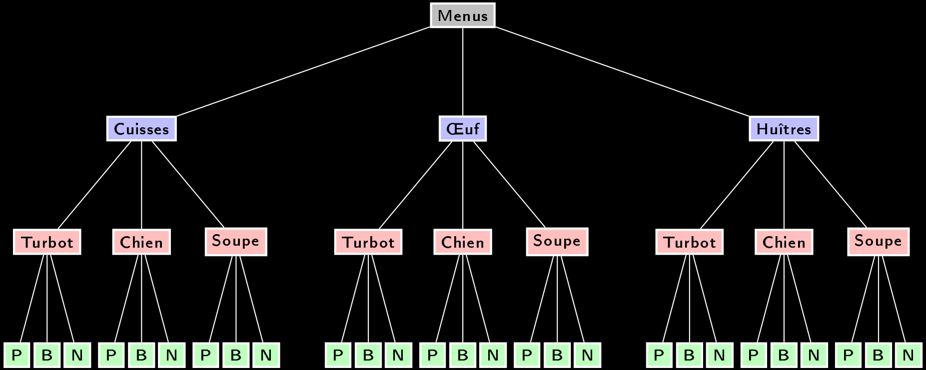
$$E = \{\text{Cuisses de sauterelles panées, œuf mou, huîtres de l'Erdre}\}$$

- l'ensemble des plats de résistance :

$$P = \{\text{Turbot à l'huile de ricin, Chien à l'andalouse, Soupe d'orties}\}$$

- l'ensemble des desserts :

$$D = \{\text{Pomme}, \text{Banane}, \text{Noix}\}$$


Menus
Cuisses
Œuf
Huîtres
Turbot
Chien
Soupe
Turbot
Chien
Soupe
Turbot
Chien
Soupe
P B N P B N P B N
P B N P B N P B N
P B N P B N P B N

Exercice 4

Comment définir récursivement le produit cartésien de deux ensembles E_1 et E_2 ? Cela nous sera utile pour programmer en Caml...

Sommaire

Exercice 5

Comment calculer récursivement le cardinal d'un ensemble ?