Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculez A^n.

Exercice 2

Étudiez la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin(4t) \end{cases}$

Exercice 3

Soit f une fonction de période 2π telle que $\begin{cases} f(t) = -1 \text{ sur }]-\pi\,;0[\\ f(t) = 1 \text{ sur }]0\,;\pi[\\ f(0) = f(\pi) = 0 \end{cases}$

1. Étudiez son développement en série de Fourier.

2. Calculez $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Exercice 4

Étudiez la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$

Exercice 5

Soit Γ la fonction définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$. Montrer que $\Gamma(x)$ converge pour $x > 0$.
Déterminez une relation de récurrence entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$ et déduisez-en $\Gamma(n)$ en fonction de n avec n un entier naturel non nul.

Exercice 6

Étudiez la courbe d'équation $\rho = \sin\left(\theta/3\right)$

Exercice 7

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8

Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{4} \text{ pour tout } t \in [-\pi\,;\,\pi]$$

Déterminez son développement en série de Fourier.

Exercice 9

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{C} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} \mathrm{X}'(t) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{X}(t) \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{C} \end{cases}$

Exercice 10

Étudier le comportement asymptotique de $f : x \mapsto x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

CORRECTION

Exercice 1

→ `A:=[[1,1/4,0],[0,1/2,0],[0,1/4,1]]`

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

→ `eigenvals(A)`

$$\frac{1}{2},1,1$$

→ `P:=egv(A)`

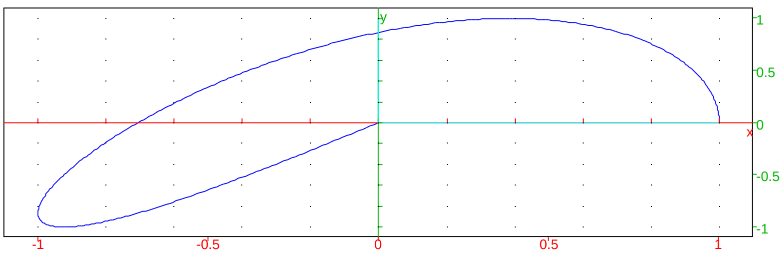
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ `P^(-1)`

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

→ `plotparam([cos(3*t),sin(4*t)],t=0..pi/2,color=blue)`

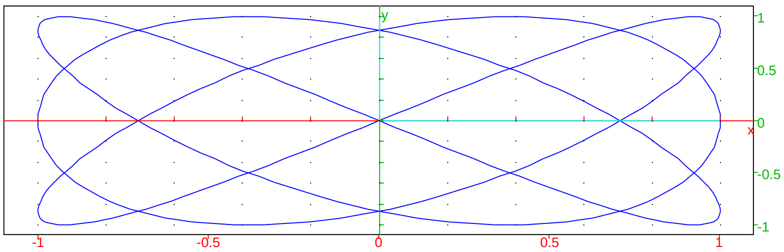


t	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
Signe de $x'(t)$	0	$-$	$-\left(3\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$	$-$	0	$+$	3
Variations de x	1	$\searrow$	$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
Signe de $y'(t)$	4	$+$	0	$-$	-2	$-$	4
Variations de y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\right)$	$\nearrow$	0

```
→ evalf(cos(pi/8),cos(pi/6),cos(pi/8))
```

$$0.923880, 0.866025, 0.923880$$

```
→ plotparam([cos(3*t),sin(4*t)],t=-pi..pi,color=blue)
```

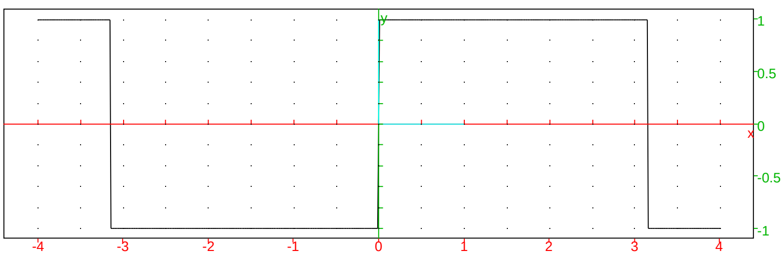


Exercice 3

```
→ f(t):=piecewise(t<-pi,1,t<0,-1,t==0,0,t<pi,1,t==pi,0,-1)
```

```
(t)->piecewise(t<(-pi),1,t<0,-1,(t==0),0,t<pi,1,(t==pi),0,-1)
```

```
→ graphe(f(x),x=-4..4)
```




```
→ four_bn(LI,LV,T):={assume(p,integer);integ:=0;m:=size(LI);for(k:=0;k<m;k++){integ:=integ+(2/T)*(i
```

→ four_bn([-pi..0,0..pi],[-1,1],2*pi);

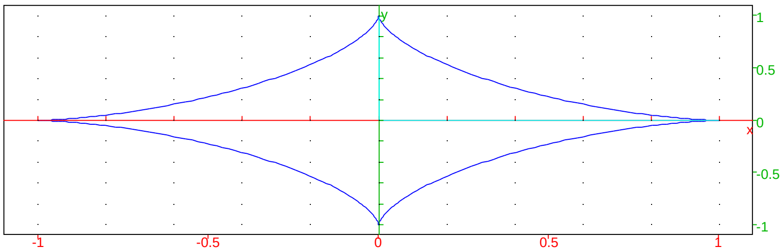
$$\frac{(-(2(-1)^p)+2)}{p\pi}$$

→ sum((-1)^n/(2*n+1),n=0..+infinity)

$$\frac{\pi}{4}$$

Exercice 4

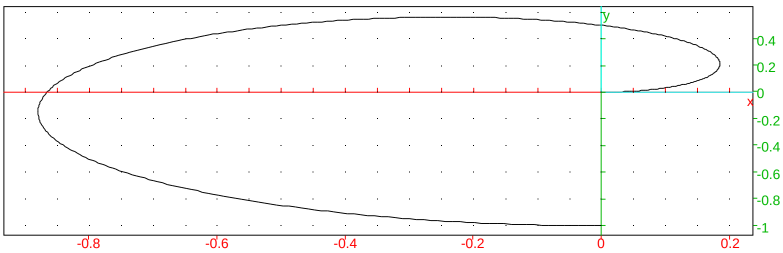
→ plotparam([(cos(t))^3,(sin(t))^3],t=-pi..pi,color=blue)



Exercice 5

Exercice 6

→ plotpolar(sin(t/3),t,0,3*pi/2)



Exercice 7

→ `A:=[[-2,0,3],[-3,1,3],[2,0,-1]]`

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

→ `eigenvals(A)`

$$-4,1,1$$

→ `P:=egv(A)`

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ `P^(-1)`

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{-1}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{-3}{5} & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Exercice 8

→ `four_an(LI,LV,T):={assume(p,integer);integ:=0;m:=size(LI);for(k:=0;k<m;k++){integ:=integ+(2/T)*(i`
→ `factor(four_an([-pi..pi],[cosh(x)/2],2*pi))`

$$\frac{(e^{\pi}+1)(e^{\pi}-1)(-1)^{p}}{2(p^{2}+1)\pi e^{\pi}}$$

Exercice 9

→ `A:=[[-2,-2,0],[-2,0,2],[0,2,2]]`

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

→ `eigenvals(A)`

$$-\left(2\sqrt{3}\right),2\sqrt{3},0$$

→ `P:=egv(A)`

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & -\left(\sqrt{3}\right)+1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -\left(\sqrt{3}\right)+1 & \sqrt{3}+1 & 1 \end{pmatrix}$$

→ `normal(P^(-1))`

$$\begin{pmatrix} \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{12} & \frac{1}{6} & \frac{\left(-\left(\sqrt{3}\right)+1\right)}{12} \\ \frac{\left(-\left(\sqrt{3}\right)+1\right)}{12} & \frac{1}{6} & \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 10

→ `taylor((1/t)^2*ln(((1/t)+1)/((1/t)-1)),t=0,2)`

$$\frac{2}{t}+\frac{2}{3}\times t+t^{3}\mathrm{order\_size}(t)$$