Exercice 1

Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi\,;\pi]$ par :

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

Étudier son développement en série de Fourier puis calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Exercice 2

Étudier les éléments caractéristiques de la conique d'équation :

$$x^2 - 4y^2 + 2x - 3$$

Exercice 3

Donner un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $f\ :\ x \mapsto \frac{x\,\mathrm{ch}^3(x)}{\ln(1+x)}$

Exercice 4

Étudier la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 3 - 2 * \cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2 * \sin(t) - \sin(2 * t) \end{cases}$$

Exercice 5

A est une matrice carrée de taille 3 admettant -1, 2 et 3 comme valeurs propres et X_1, X_2 et X_3 comme vecteurs propres.
On note $B = I_3 + \frac{2}{3}A - \frac{1}{3}A^2$

1. Les vecteurs propres de A sont-ils aussi des vecteurs propres de B ?

2. Quelles sont les valeurs propres de B ?

3. $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Déterminer A.

Exercice 6

Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 5y' - 6y = 2 * x + 1$$

sachant que $y'(0) = y(0) = 1$

Exercice 7

$A = \begin{pmatrix} -3 & 10 & \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?
Déterminer les sous-espaces propres associés.

Exercice 8

Calculer $\iint_{\mathscr{D}} e^{-x^2-y^2}$ avec $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2\right\}$

Exercice 9

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} X'(t) = A \cdot X(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 10

Déterminer un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n + \sqrt{n^2-1}}$

Exercice 11

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Exercice 12

Étudier la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = 2 * (1 + \cos(\theta))$
Calculer sa longueur sur une période.

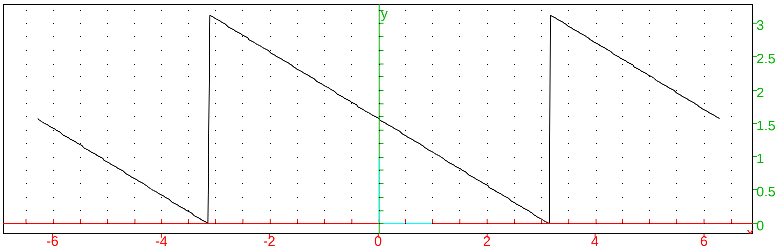
CORRECTION

Exercice 1

```
f(t):=piecewise(t<=-pi,0.5*(pi-(t+2*pi)),t<=pi,0.5*(pi-t),t>pi,0.5*(pi-(t-2*pi)),-1)
```

(t)->piecewise(t<=(-pi),0.5*(pi-t+2*pi),t<=pi,0.5*(pi-t),t>pi,0.5*(pi-t-2*pi),-1)

```
graphe(f(x),x=-2*pi..2*pi)
```




```
four_bn(LI,LV,T):={assume(p,integer);integ:=0;m:=size(LI);for(k:=0;k<m;k++){integ:=integ+(2/T)*(int
    (LV[k]*sin(p*2*Pi*x/T),x=LI[k]));}return(simplify(integ))}:;
```

```
four_bn([-pi..pi],[(pi-x)/2],2*pi);
```

$$\frac{(-1)^p}{p}$$

```
sum(1/n^2,n=1..+infinity)
```

$$\frac{1}{6}\pi^2$$

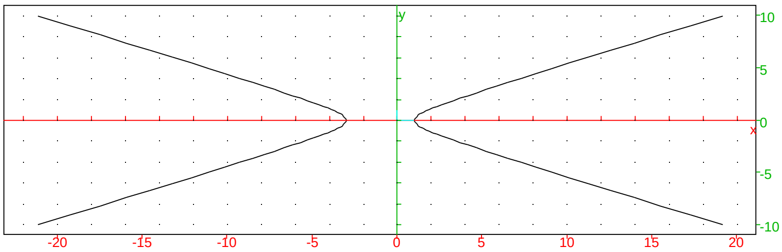
Exercice 2

```
simplifier(conique_reduite(x^2-4y^2+2x-3))
```

Hyperbola of center (-1,0)

$$[[-1,0],\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},1,x^2-\left(4y^2\right)-4,\begin{pmatrix} 2\cosh(t)+i\sinh(t)-1 & t & -3 & 3 & 0.100000 \\ -(2\cosh(t))-(-i\sinh(t))-1 & t & -3 & 3 & 0.100000 \end{pmatrix}]$$

```
conique(x^2-4y^2+2x-3)
```



Exercice 3

```
taylor(((cosh(x))^3),x,3)
```

$$1+\frac{3}{2}\times x^{2}+x^{4}\mathrm{order\_size}(x)$$

```
taylor((x/(ln(1+x)),x,4)
```

$$1+\frac{1}{2}\times x+\frac{1}{-12}\times x^{2}+\frac{1}{24}\times x^{3}+\frac{-19}{720}\times x^{4}+x^{5}\mathrm{order\_size}(x)$$

```
taylor((x*(cosh(x))^3)/(ln(1+x)),x,5)
```

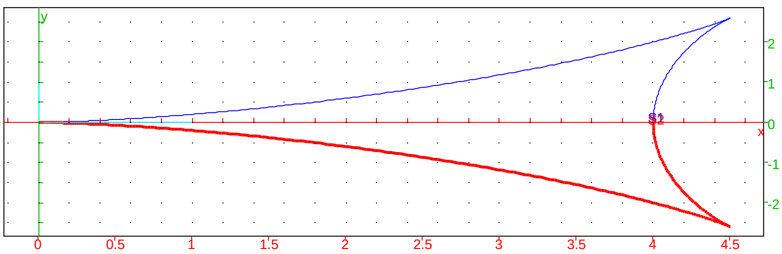
$$1+\frac{1}{2}\times x+\frac{17}{12}\times x^{2}+\frac{19}{24}\times x^{3}+\frac{521}{720}\times x^{4}+\frac{83}{160}\times x^{5}+x^{6}\mathrm{order\_size}(x)$$

Exercice 4

```
S1:=plotparam([3-2*cos(t)-cos(2*t),2*sin(t)-sin(2*t)],t=0..pi,color=blue):;
```

```
S2:=couleur(symetrie(droite(y=0),S1),rouge+line_width_3):;
```

```
S1,S2
```



Exercice 5

```
P:=[[0, 1, 0],[1,0,1],[2,2,1]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
P^(-1)
```

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

```
D:=diag([-1,2,3])
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

```
A:=(P*D)*P^(-1)
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \\ 14 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

```
dsolve([y''-5*y'-6*y=2*x+1,y(0)=1,y'(0)=1],y)
```

$$[\frac{4}{7} \times e^{-x} + \frac{20}{63} \times e^{6x} + \frac{(-(27x)+9)}{81}]$$

Exercice 7

```
complex_mode:=1:;
```

```
A:=[[-3,1,0],[0,0,5],[0,-2,2]]
```

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

```
eigenvals(A)
```

$$1-3*i,-3,1+3*i$$

```
egv(A)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4-3*i & 4+3*i & 0 \\ -1-3*i & -1+3*i & 0 \end{pmatrix}$$

```
complex_mode:=0:;
```

Exercice 8

```
int(int(r*exp(-r^2),r=0..a),t=0..2*pi)
```

$$-\left(\pi e^{-(a^2)}\right)+\pi$$

Exercice 9

```
A:=[[2,5],[1,-2]]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

```
eigenvals(A)
```

$$-3,3$$

```
egv(A)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10

```
taylor(sqrt(n+sqrt(n^2+1))-sqrt(n+sqrt(n^2-1)),n=+infinity,1)
```

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \times \sqrt{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}^{1} + \sqrt{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}^{1}\text{order\_size}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 11

Exercice 12

```
r(t):=2*(1+cos(t))
```

(t)->2*(1+cos(t))

```
simplifier(sqrt((diff(r(t),t))^2+(r(t))^2))
```

$$2\sqrt{2}\sqrt{\cos(t)+1}$$

```
complex_mode:=1;
```

$$1$$

```
2*int((sqrt((diff(r(t),t))^2+(r(t))^2)),t=0..pi)
```

$$-16$$

```
polarplot(r(t),t=0..2*pi,color=red)
```