Programmation et matrices

INFO1 - semaines 48 à 50

Guillaume CONNAN

IUT de Nantes - Dpt d'informatique

novembre 2015

Sommaire

Sommaire

Matrice ?

```
  type Indice = Int
  type Taille = (Indice,Indice)
```

```
data  Matrice coeffs =
        Mat (Taille, (Indice,Indice) -> coeffs)
```

```
Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
```

? ?

Matrice ?

```
type Indice = Int
type Taille = (Indice,Indice)
```

```
data  Matrice coeffs =
        Mat (Taille, (Indice,Indice) -> coeffs)
```

```
Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
```

??

Matrice ?

```
type Indice = Int
type Taille = (Indice,Indice)
```

```
data  Matrice coeffs =
        Mat (Taille, (Indice,Indice) -> coeffs)
```

```
Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
```

??

Matrice ?

```
  type Indice = Int
  type Taille = (Indice,Indice)
```

```
data  Matrice coeffs =
        Mat (Taille, (Indice,Indice) -> coeffs)
```

```
Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
```

? ?

Matrice ?

```
type Indice = Int
type Taille = (Indice,Indice)
```

```
data  Matrice coeffs =
        Mat (Taille, (Indice,Indice) -> coeffs)
```

```
Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
```

? ?

```
> let ma = Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
> ma
 0   1   2
 3   4   5
 6   7   8
 9  10  11
12  13  14
```

Somme

Comment additionner deux matrices ?

```
(@+) :: (Num t)=> Matrice t   -> Matrice t          -> Matrice t
(@+)              (Mat (t,f))    (Mat (t',f'))
          | t == t'   = Mat(t, \ (i,j) -> f(i,j) + f'(i,j))
          | otherwise = error "Somme : tailles incompatibles"
```

Somme

Comment additionner deux matrices ?

```
(@+) :: (Num t)=> Matrice t   -> Matrice t           -> Matrice t
(@+)              (Mat (t,f))    (Mat (t',f'))
          | t == t'    = Mat(t, \ (i,j) -> f(i,j) + f'(i,j))
          | otherwise = error "Somme : tailles incompatibles"
```

Somme

```
> ma
 0   1   2
 3   4   5
 6   7   8
 9  10  11
12  13  14

> ma @+ ma
 0   2   4
 6   8  10
12  14  16
18  20  22
24  26  28
```

Produit par un scalaire

Multiplier une matrice par un scalaire ?

```haskell
instance Functor Matrice where
              fmap g (Mat(taille,f)) = Mat(taille, g.f)
```

```haskell
(@.) :: (Num t) => t -> Matrice t -> Matrice t
(@.)              k                = fmap (* k)
```

Produit par un scalaire

Multiplier une matrice par un scalaire ?

```
instance Functor Matrice where
              fmap g (Mat(taille,f)) = Mat(taille, g.f)
```

```
(@.) :: (Num t) => t -> Matrice t -> Matrice t
(@.)               k              = fmap (* k)
```

Produit par un scalaire

Multiplier une matrice par un scalaire ?

```
instance Functor Matrice where
              fmap g (Mat(taille,f)) = Mat(taille, g.f)
```

```
(@.) :: (Num t) => t -> Matrice t -> Matrice t
(@.)               k                 = fmap (* k)
```

Produit par un scalaire

```
> ma
 0    1    2
 3    4    5
 6    7    8
 9   10   11
12   13   14

> (-4) @. ma
  0    -4    -8
-12   -16   -20
-24   -28   -32
-36   -40   -44
-48   -52   -56
```

```
instance (Num t) => Num (Matrice t) where
    ???
```

```
> let ma = Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
> let mb = fromListe (3,2) [1..6] :: Matrice Int
```

```
> ma
 0   1   2
 3   4   5
 6   7   8
 9  10  11
12  13  14
```

```
> mb
1  2
3  4
5  6
```

```
> let ma = Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
> let mb = fromListe (3,2) [1..6] :: Matrice Int
```

```
> ma
 0   1   2
 3   4   5
 6   7   8
 9  10  11
12  13  14
```

```
> mb
1  2
3  4
5  6
```

```
> let ma = Mat((5,3), \ (i,j) -> 3*i + j)
> let mb = fromListe (3,2) [1..6] :: Matrice Int
```

```
> ma
 0   1   2
 3   4   5
 6   7   8
 9  10  11
12  13  14
```

```
> mb
1  2
3  4
5  6
```

```
> ma + ma
 0    2    4
 6    8   10
12   14   16
18   20   22
24   26   28
```

```
> ma * mb
 13    16
 40    52
 67    88
 94   124
121   160
```

```
> ma + ma
 0   2   4
 6   8  10
12  14  16
18  20  22
24  26  28
```

```
> ma * mb
 13   16
 40   52
 67   88
 94  124
121  160
```

Sommaire

Sommaire

$$M \times N = N \times M = \mathbb{I}_n$$

$$N = M^{-1}$$

Exercice 1

Si A et B sont régulières et de taille n, alors comment calculer $(A \times B)^{-1}$ à partir des inverses de A et B ?

$$M \times N = N \times M = \mathbb{I}_n$$

$$N = M^{-1}$$

Exercice 1

Si A et B sont régulières et de taille n, alors comment calculer $(A \times B)^{-1}$ à partir des inverses de A et B ?

Sommaire

Matrices élémentaires

E_n^{ij} la matrice carrée de $\mathbb{A}^{n\times n}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (i,j) qui vaut $1_{\mathbb{A}}$.

$E_3^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{Z}^{3\times 3}$.

```
In [6]: Mat([3,3],lambda i,j: 1 if (i,j) == (0,1) else 0)
Out[6]:
 0  1  0
 0  0  0
 0  0  0
```

Matrices élémentaires

E_n^{ij} la matrice carrée de $\mathbb{A}^{n\times n}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (i,j) qui vaut $1_{\mathbb{A}}$.

$E_3^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{Z}^{3\times 3}$.

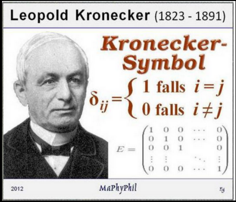
```
In [6]: Mat([3,3],lambda i,j: 1 if (i,j) == (0,1) else 0)
Out[6]:
 0   1   0
 0   0   0
 0   0   0
```

Matrices élémentaires

E_n^{ij} la matrice carrée de $\mathbb{A}^{n\times n}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (i,j) qui vaut $1_{\mathbb{A}}$.

$E_3^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{Z}^{3\times 3}$.

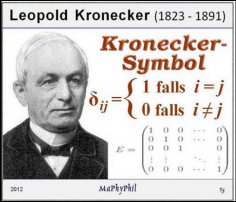
```
In [6]: Mat([3,3],lambda i,j: 1 if (i,j) == (0,1) else 0)
Out[6]:
 0  1  0
 0  0  0
 0  0  0
```



« Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk »

$$\delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \{0;1\} \\ (i,j) & \mapsto & 1 \text{ si } i=j, \ 0 \text{ sinon} \end{array}$$

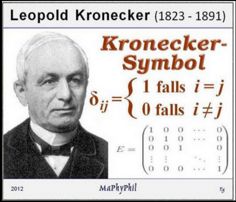
$$\mathbb{I}_n = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$



« *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk* »

$$\delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \{0;1\} \\ (i,j) & \mapsto & 1 \text{ si } i=j,\ 0 \text{ sinon} \end{array}$$

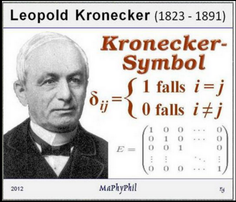
$$\mathbb{I}_n = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$



« *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk* »

$$\delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \{0;1\} \\ (i,j) & \mapsto & 1 \text{ si } i = j,\ 0 \text{ sinon} \end{array}$$

$$\mathbb{I}_n = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$



« *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk* »

$$\delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \{0;1\} \\ (i,j) & \mapsto & 1 \text{ si } i=j, \ 0 \text{ sinon} \end{array}$$

$$\mathbb{I}_n = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

Exercice 2

Étudiez le produit $E_n^{ij} \times E_n^{\ell k}$ et exprimez-le à l'aide du symbole de KRONECKER.
Simplifiez ensuite le produit $(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij})$: qu'en concluez-vous ?

Exercice 2

Étudiez le produit $E_n^{ij} \times E_n^{\ell k}$ et exprimez-le à l'aide du symbole de Kronecker*.*
Simplifiez ensuite le produit $(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij})$: qu'en concluez-vous ?

Exercice 2

Étudiez le produit $E_n^{ij} \times E_n^{\ell k}$ *et exprimez-le à l'aide du symbole de* KRONECKER.
Simplifiez ensuite le produit $(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij})$ *: qu'en concluez-vous ?*

Transvections de lignes

$$T_\lambda^{ij} : \begin{array}{rcl} \mathbb{A}^{n\times p} & \to & \mathbb{A}^{n\times p} \\ M & \mapsto & (\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times M \end{array}$$

Exercice 3

Calculez par exemple l'image par T_λ^{23} *de* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

$$L_i \leftarrow L_i \boxplus (\lambda \boxdot L_j)$$

$$(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij})^{-1} = \mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij}$$

Transvections de lignes

$$T_\lambda^{ij} : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{n\times p} & \to & \mathbb{A}^{n\times p} \\ M & \mapsto & (\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times M \end{array}$$

Exercice 3

Calculez par exemple l'image par T_λ^{23} *de* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

$$L_i \leftarrow L_i \boxplus (\lambda \boxdot L_j)$$

$$(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij})^{-1} = \mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij}$$

Transvections de lignes

$$T_\lambda^{ij} : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{n\times p} & \to & \mathbb{A}^{n\times p} \\ M & \mapsto & (\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times M \end{array}$$

Exercice 3

Calculez par exemple l'image par T_λ^{23} *de* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

$$L_i \leftarrow L_i \boxplus (\lambda \boxdot L_j)$$

$$(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij})^{-1} = \mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij}$$

Transvections de lignes

$$T_\lambda^{ij}: \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{n\times p} & \to & \mathbb{A}^{n\times p} \\ M & \mapsto & (\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times M \end{array}$$

Exercice 3

Calculez par exemple l'image par T_λ^{23} *de* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

$$L_i \leftarrow L_i \boxplus (\lambda \boxdot L_j)$$

$$(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij})^{-1} = \mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij}$$

Transvections de lignes

$$T_\lambda^{ij} : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{n\times p} & \to & \mathbb{A}^{n\times p} \\ M & \mapsto & (\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij}) \times M \end{array}$$

Exercice 3

Calculez par exemple l'image par T_λ^{23} *de* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

$$L_i \leftarrow L_i \boxplus (\lambda \boxdot L_j)$$

$$(\mathbb{I}_n + \lambda E_n^{ij})^{-1} = \mathbb{I}_n - \lambda E_n^{ij}$$

Dilatations de lignes

$$L_i \leftarrow \lambda \boxdot L_i$$

$$\Delta_n^{i,\lambda} = \mathbb{I}_n + (\lambda \boxplus (-1_{\mathbb{A}}))E_n^{ii}$$

$$\Delta_3^{2,\lambda} \times \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Dilatations de lignes

$$L_i \leftarrow \lambda \boxdot L_i$$

$$\Delta_n^{i,\lambda} = \mathbb{I}_n + (\lambda \boxplus (-1_{\mathbb{A}}))E_n^{ii}$$

$$\Delta_3^{2,\lambda} \times \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Dilatations de lignes

$$L_i \leftarrow \lambda \boxdot L_i$$

$$\Delta_n^{i,\lambda} = \mathbb{I}_n + (\lambda \boxplus (-1_{\mathbb{A}}))E_n^{ii}$$

$$\Delta_3^{2,\lambda} \times \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Échange de lignes

$$S_n^{ij} = \Delta_n^{j,-1_{\mathbb{A}}} \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - E_n^{ji}) \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij})$$

Exercice 4

Que vaut le produit de S_3^{23} par $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$?

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

Échange de lignes

$$S_n^{ij} = \Delta_n^{j,-1_{\mathbb{A}}} \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - E_n^{ji}) \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij})$$

Exercice 4

Que vaut le produit de S_3^{23} *par* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ *?*

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

Échange de lignes

$$S_n^{ij} = \Delta_n^{j,-1_{\mathbb{A}}} \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - E_n^{ji}) \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij})$$

Exercice 4

Que vaut le produit de S_3^{23} par $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$?

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

Échange de lignes

$$S_n^{ij} = \Delta_n^{j,-1_{\mathbb{A}}} \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij}) \times (\mathbb{I}_n - E_n^{ji}) \times (\mathbb{I}_n + E_n^{ij})$$

Exercice 4

Que vaut le produit de S_3^{23} *par* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ *?*

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

```
In [7]: M = list2mat([[11,12,13],[21,22,23],[31,32,33]])

In [8]: M
Out[8]:
 11  12  13
 21  22  23
 31  32  33

In [9]: M.swap(2,0)
Out[9]:
 31  32  33
 21  22  23
 11  12  13
```

Une fonction φ de $\mathbb{A}^{n\times p}$ dans lui-même est une **opération sur les lignes** si c'est la composée finie de transvections et de dilatations de lignes.

$$\varphi : M \mapsto (F_k \times F_{k-1} \cdots \times F_1) \times M$$

$$\varphi^{-1} : N \mapsto (F_1^{-1} \times F_2^{-1} \cdots \times F_k^{-1}) \times N$$

Inverse de la matrice $\varphi(\mathbb{I}_n)$: $\varphi^{-1}(\mathbb{I}_n)$.

Une fonction φ de $\mathbb{A}^{n\times p}$ dans lui-même est une **opération sur les lignes** si c'est la composée finie de transvections et de dilatations de lignes.

$$\varphi : M \mapsto (F_k \times F_{k-1} \cdots \times F_1) \times M$$

$$\varphi^{-1} : N \mapsto (F_1^{-1} \times F_2^{-1} \cdots \times F_k^{-1}) \times N$$

Inverse de la matrice $\varphi(\mathbb{I}_n)$: $\varphi^{-1}(\mathbb{I}_n)$.

Une fonction φ de $\mathbb{A}^{n \times p}$ dans lui-même est une **opération sur les lignes** si c'est la composée finie de transvections et de dilatations de lignes.

$$\varphi : M \mapsto (F_k \times F_{k-1} \cdots \times F_1) \times M$$

$$\varphi^{-1} : N \mapsto (F_1^{-1} \times F_2^{-1} \cdots \times F_k^{-1}) \times N$$

Inverse de la matrice $\varphi(\mathbb{I}_n)$: $\varphi^{-1}(\mathbb{I}_n)$.

Une fonction φ de $\mathbb{A}^{n\times p}$ dans lui-même est une **opération sur les lignes** si c'est la composée finie de transvections et de dilatations de lignes.

$$\varphi : M \mapsto (F_k \times F_{k-1} \cdots \times F_1) \times M$$

$$\varphi^{-1} : N \mapsto (F_1^{-1} \times F_2^{-1} \cdots \times F_k^{-1}) \times N$$

Inverse de la matrice $\varphi(\mathbb{I}_n)$:$\varphi^{-1}(\mathbb{I}_n)$.

Théorème 1

φ étant une opération élémentaire sur les lignes,

$$M \text{ inversible} \leftrightarrow \varphi(M) \text{ inversible}$$

Théorème 2

Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ est une suite d'opérations sur les lignes de M qui transforme M en $\mathbb{I}_n$ alors M est inversible et

$$M^{-1} = \varphi_k(\mathbb{I}_n) \times \varphi_{k-1}(\mathbb{I}_n) \times \cdots \times \varphi_1(\mathbb{I}_n) = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \cdots \circ \varphi_1(\mathbb{I}_n)$$

Théorème 1

φ étant une opération élémentaire sur les lignes,

$$M \text{ inversible} \leftrightarrow \varphi(M) \text{ inversible}$$

Théorème 2

Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ est une suite d'opérations sur les lignes de M qui transforme M en $\mathbb{I}_n$ alors M est inversible et

$$M^{-1} = \varphi_k(\mathbb{I}_n) \times \varphi_{k-1}(\mathbb{I}_n) \times \ldots \times \varphi_1(\mathbb{I}_n) = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \ldots \circ \varphi_1(\mathbb{I}_n)$$

Théorème 1

φ étant une opération élémentaire sur les lignes,

$$M \text{ inversible} \leftrightarrow \varphi(M) \text{ inversible}$$

Théorème 2

Si $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ est une suite d'opérations sur les lignes de M qui transforme M en $\mathbb{I}_n$ alors M est inversible et

$$M^{-1} = \varphi_k(\mathbb{I}_n) \times \varphi_{k-1}(\mathbb{I}_n) \times .... \times \varphi_1(\mathbb{I}_n) = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ ... \circ \varphi_1(\mathbb{I}_n)$$

Sommaire

Sommaire

$$M \stackrel{\ell}{\equiv} N \leftrightarrow N = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \ldots \circ \varphi_1(M)$$

opérations φ	Partie gauche	Partie droite	Remarques
	M	$\mathbb{I}_n$	initialisation du tableau
φ_1	M_1	R_1	$M_1 = \varphi_1(M)$, $R_1 = \varphi_1(\mathbb{I}_n)$
φ_2	M_2	R_2	$M_2 = \varphi_2(M_1)$, $R_2 = \varphi_2(R_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
φ_i	M_i	R_i	$M_i = R_i \times M$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
φ_k	N	R	$N = R \times M$

$$M \overset{\ell}{\equiv} N \leftrightarrow N = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \ldots \circ \varphi_1(M)$$

opérations φ	Partie gauche	Partie droite	Remarques
	M	$\mathbb{I}_n$	initialisation du tableau
φ_1	M_1	R_1	$M_1 = \varphi_1(M),\ R_1 = \varphi_1(\mathbb{I}_n)$
φ_2	M_2	R_2	$M_2 = \varphi_2(M_1),\ R_2 = \varphi_2(R_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
φ_i	M_i	R_i	$M_i = R_i \times M$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
φ_k	N	R	$N = R \times M$

Sommaire

L réduite échelonnée

1. Toutes les lignes nulles (une ligne est nulle si elle ne comporte que des zéros) sont au-dessous des lignes non nulles.
2. Dans chaque ligne non nulle le premier élément non nul est $1_{\mathbb{A}}$ (on lit une ligne de la gauche vers la droite), ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelé **pivot** ou élément pivot. La colonne où se trouve ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelée colonne pivot et c'est le seul élément non nul de cette colonne.
3. Si, **de plus**, les pivots apparaissent en ordre croissant par numéro de ligne **et** numéro de colonne, on dit que M est **ℓ-réduite échelonnée** (en abrégé lré ou LRé).

L réduite échelonnée

1. Toutes les lignes nulles (une ligne est nulle si elle ne comporte que des zéros) sont au-dessous des lignes non nulles.
2. Dans chaque ligne non nulle le premier élément non nul est $1_{\mathbb{A}}$ (on lit une ligne de la gauche vers la droite), ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelé **pivot** ou élément pivot. La colonne où se trouve ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelée colonne pivot et c'est le seul élément non nul de cette colonne.
3. Si, **de plus**, les pivots apparaissent en ordre croissant par numéro de ligne **et** numéro de colonne, on dit que M est **ℓ-réduite échelonnée** (en abrégé lré ou LRé).

L réduite échelonnée

1. Toutes les lignes nulles (une ligne est nulle si elle ne comporte que des zéros) sont au-dessous des lignes non nulles.
2. Dans chaque ligne non nulle le premier élément non nul est $1_{\mathbb{A}}$ (on lit une ligne de la gauche vers la droite), ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelé **pivot** ou élément pivot. La colonne où se trouve ce $1_{\mathbb{A}}$ est appelée colonne pivot et c'est le seul élément non nul de cette colonne.
3. Si, **de plus**, les pivots apparaissent en ordre croissant par numéro de ligne **et** numéro de colonne, on dit que M est **ℓ-réduite échelonnée** (en abrégé lré ou LRé).

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est } \ell\text{-réduite non échelonnée}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \text{ n'est pas } \ell\text{-réduite}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est } \ell\text{-réduite échelonnée}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A_3 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A_4 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 9 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A_5 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 9 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A_6 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Sommaire

Définition 3 (matrice de passage)

Soit B et B' deux bases de $\mathbb{R}^3$. On appelle matrice de passage de B à B' et on note $P_{B,B'}$ la matrice de dont les colonnes sont les vecteurs de B' exprimés dans B :

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{e'_1} & \overrightarrow{e'_2} & \overrightarrow{e'_3} & \\ \left(\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array}\right. & \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array} & \left.\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array}\right) & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array} \end{array}$$

Définition 3 (matrice de passage)

Soit B et B' deux bases de $\mathbb{R}^3$. On appelle matrice de passage de B à B' et on note $P_{B,B'}$ la matrice de dont les colonnes sont les vecteurs de B' exprimés dans B :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \overrightarrow{e_1'} & \overrightarrow{e_2'} & \overrightarrow{e_3'} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array} \end{array}$$

Définition 3 (matrice de passage)

Soit B et B' deux bases de $\mathbb{R}^3$. On appelle matrice de passage de B à B' et on note $P_{B,B'}$ la matrice de dont les colonnes sont les vecteurs de B' exprimés dans B :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \overrightarrow{e'_1} & \overrightarrow{e'_2} & \overrightarrow{e'_3} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array} \end{array}$$

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur dont les coordonnées dans une certaine base $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ sont (x, y, z).

On peut donc associer une matrice colonne V à ce vecteur : $V = mat_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Notons maintenant $V' = mat_{B'} \overrightarrow{v}$ alors :

Théorème 4 (changement de coordonnées d'un vecteur)

$$V = P_{B,B'} \times V'$$

Preuve...

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur dont les coordonnées dans une certaine base $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ sont (x, y, z).

On peut donc associer une matrice colonne V à ce vecteur : $V = mat_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Notons maintenant $V' = mat_{B'} \overrightarrow{v}$ alors :

Théorème 4 (changement de coordonnées d'un vecteur)

$$V = P_{B,B'} \times V'$$

Preuve...

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur dont les coordonnées dans une certaine base $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ sont (x, y, z).

On peut donc associer une matrice colonne V à ce vecteur : $V = mat_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Notons maintenant $V' = mat_{B'} \overrightarrow{v}$ alors :

Théorème 4 (changement de coordonnées d'un vecteur)

$$V = P_{B,B'} \times V'$$

Preuve...

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur dont les coordonnées dans une certaine base $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ sont (x, y, z).

On peut donc associer une matrice colonne V à ce vecteur : $V = mat_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Notons maintenant $V' = mat_{B'} \overrightarrow{v}$ alors :

Théorème 4 (changement de coordonnées d'un vecteur)

$$V = P_{B,B'} \times V'$$

Preuve...

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur dont les coordonnées dans une certaine base $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ sont (x, y, z).

On peut donc associer une matrice colonne V à ce vecteur : $V = mat_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Notons maintenant $V' = mat_{B'}\overrightarrow{v}$ alors :

Théorème 4 (changement de coordonnées d'un vecteur)

$$V = P_{B,B'} \times V'$$

Preuve...

$$V' = P_{B,B'}^{-1} \times V$$

Sommaire

Bases

x un vecteur dans E de base B

φ un morphisme de E dans F avec F de base B'.

$\varphi(x) =$

Matrice ?

Bases
x un vecteur dans E de base B
φ un morphisme de E dans F avec F de base B'.
$\varphi(x) =$
Matrice ?

Bases
x un vecteur dans E de base B
φ un morphisme de E dans F avec F de base B'.
$\varphi(x) =$
Matrice ?

Bases
x un vecteur dans E de base B
φ un morphisme de E dans F avec F de base B'.
$\varphi(x) =$
Matrice ?

Bases
x un vecteur dans E de base B
φ un morphisme de E dans F avec F de base B'.
$\varphi(x) =$
Matrice ?

$$\begin{array}{cccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) & \\ \left(\begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{array}\right) & & & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array} \end{array}$$

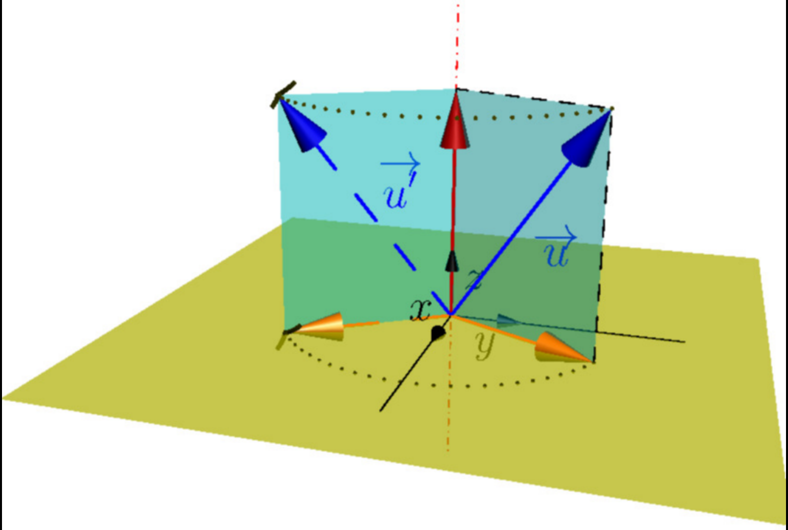
Changement de base ?

$$\begin{array}{ccc} B\ E & \xrightarrow[A]{f} & F\ B \\ {\scriptstyle P_{B,B'}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle P_{B,B'}} \\ B'\ E & \xrightarrow[A']{f} & F\ B' \end{array}$$

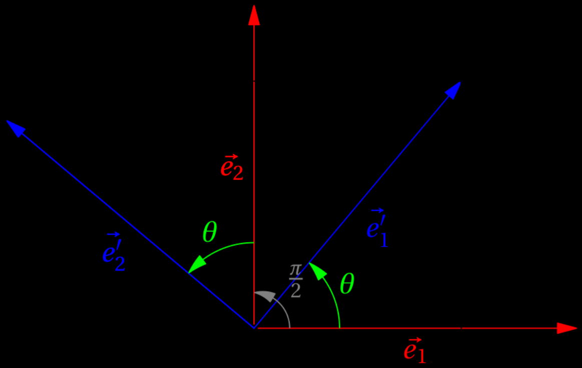
Noyau
Image

Noyau
Image

Sommaire



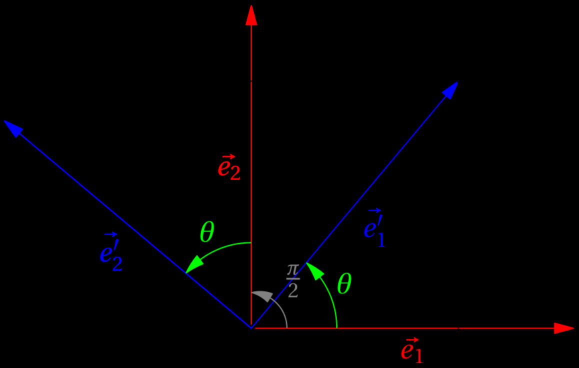
Rotation d'un vecteur



Projection orthogonale de la rotation d'un vecteur

$$\overrightarrow{e_1'} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_1} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{e_2'} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{e_1} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{e_2} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_1} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_2}$$

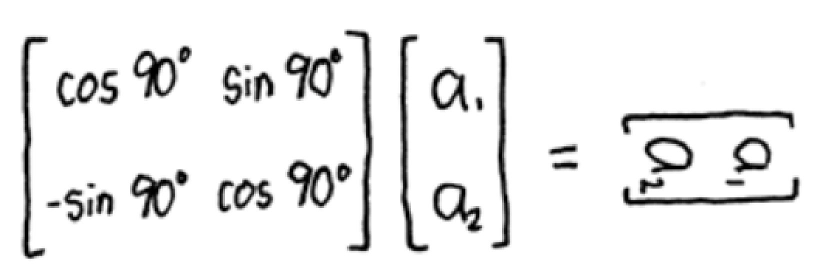


Projection orthogonale de la rotation d'un vecteur

$$\overrightarrow{e'_1} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_1} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{e'_2} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{e_1} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{e_2} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_1} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_2}$$

$$\begin{array}{cccc} r(\overrightarrow{e_1}) & r(\overrightarrow{e_2}) & r(\overrightarrow{e_3}) & \\ \left(\begin{array}{ccc} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right. & & \left.\right) & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array} \end{array}$$



Matrice de rotation d'angle xkcd