Limites

Guillaume CONNAN

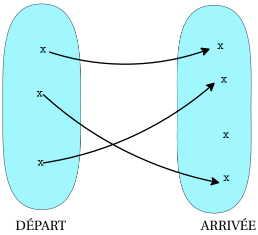
Lycée Jean PERRIN

Septembre 2007

Sommaire

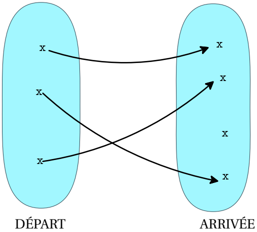
Définition

une fonction associe à TOUT élément d'un ensemble de départ un UNIQUE élément d'un ensemble d'arrivée



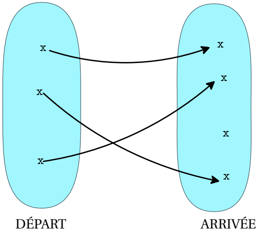
Définition

une fonction associe à TOUT élément d'un ensemble de départ un UNIQUE élément d'un ensemble d'arrivée



Définition

une fonction associe à TOUT élément d'un ensemble de départ un UNIQUE élément d'un ensemble d'arrivée



Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ et x_0 un réel. Une assertion est vraie **au voisinage** de x_0 s'il existe un intervalle I contenant x_0 tel que l'assertion soit vraie pour tout x de $I \cap \mathscr{D}$

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$. Une assertion est vraie au **voisinage** de $+\infty$ s'il existe un réel a tel que l'assertion soit vraie pour tous les x de $[a, +\infty[$

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ et x_0 un réel. Une assertion est vraie **au voisinage** de x_0 s'il existe un intervalle I contenant x_0 tel que l'assertion soit vraie pour tout x de $I \cap \mathscr{D}$

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$. Une assertion est vraie **au voisinage** de $+\infty$ s'il existe un réel a tel que l'assertion soit vraie pour tous les x de $[a, +\infty[$

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ et x_0 un réel. Une assertion est vraie **au voisinage** de x_0 s'il existe un intervalle I contenant x_0 tel que l'assertion soit vraie pour tout x de $I \cap \mathscr{D}$

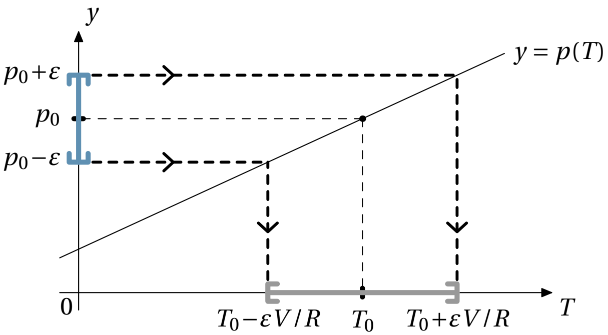
Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$. Une assertion est vraie **au voisinage** de $+\infty$ s'il existe un réel a tel que l'assertion soit vraie pour tous les x de $[a, +\infty[$

Sommaire

Définition (Limite finie en un réel)

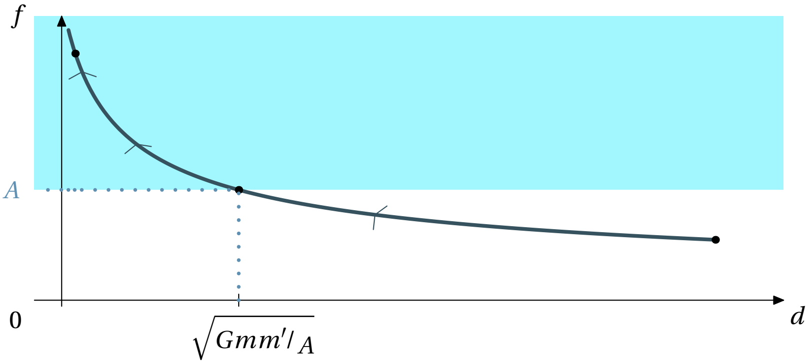
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit f une fonction définie sur l'intervalle I vers $\mathbb{R}$, soit ℓ un réel et soit a un élément ou une extrémité finie de I. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel x appartenant à $I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$, on a $f(x) \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$, c'est à dire si tout voisinage de a contient TOUTES les valeurs de $f(x)$ prises pour tous les x proches de a



Sommaire

Définition (Limite infinie en un réel)

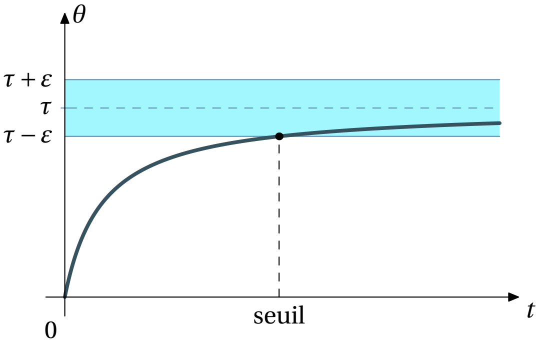
Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit f une fonction définie sur un intervalle I. Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout voisinage de $+\infty$ contient TOUTES les valeurs de $f(x)$ prises dans tous les voisinages de a.



Sommaire

Définition (Limite finie en l'infini)

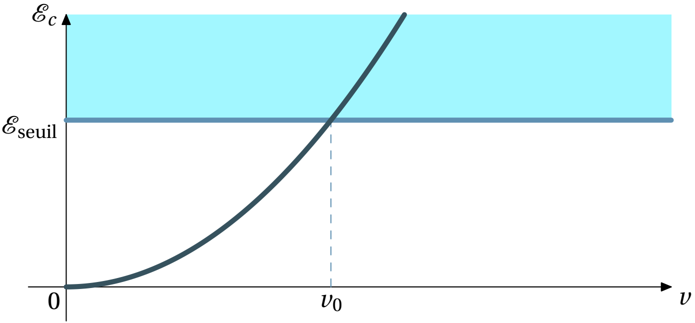
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ lorsque, pour tout réel $\varepsilon > 0$, tout intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand



Sommaire

Définition (Limite infinie en l'infini)

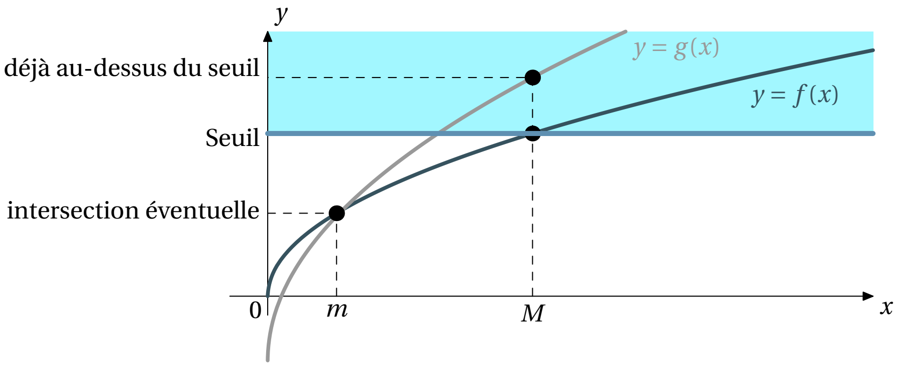
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend $+\infty$ lorsque, pour tout réel A strictement positif, l'intervalle $]A,+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand



Sommaire

Théorème

Si pour tout $x \geqslant m$ *on a* $g(x) \geqslant f(x)$ *et si* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, *alors* $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$



Démonstration.

On veut prouver que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, donc on considère un réel positif A quelconque.

Puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il existe un réel M tel que, pour tout $x \geqslant M$, on a $f(x) \geqslant A$

De plus, pour tout $x \geqslant m$, on a $g(x) \geqslant f(x)$

Donc, si on appelle μ le plus grand des réels m et M, pour tout $x \geqslant \mu$, on a $g(x) \geqslant A$, ce qui exprime que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Démonstration.

On veut prouver que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, donc on considère un réel positif A quelconque.

Puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il existe un réel M tel que, pour tout $x \geqslant M$, on a $f(x) \geqslant A$

De plus, pour tout $x \geqslant m$, on a $g(x) \geqslant f(x)$

Donc, si on appelle μ le plus grand des réels m et M, pour tout $x \geqslant \mu$, on a $g(x) \geqslant A$, ce qui exprime que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. $\square$

Démonstration.

On veut prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, donc on considère un réel positif A quelconque.
Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il existe un réel M tel que, pour tout $x \geqslant M$, on a $f(x) \geqslant A$
De plus, pour tout $x \geqslant m$, on a $g(x) \geqslant f(x)$
Donc, si on appelle μ le plus grand des réels m et M, pour tout $x \geqslant \mu$, on a $g(x) \geqslant A$, ce qui exprime que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Démonstration.

On veut prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, donc on considère un réel positif A quelconque.

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il existe un réel M tel que, pour tout $x \geqslant M$, on a $f(x) \geqslant A$

De plus, pour tout $x \geqslant m$, on a $g(x) \geqslant f(x)$

Donc, si on appelle μ le plus grand des réels m et M, pour tout $x \geqslant \mu$, on a $g(x) \geqslant A$, ce qui exprime que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

□

Démonstration.

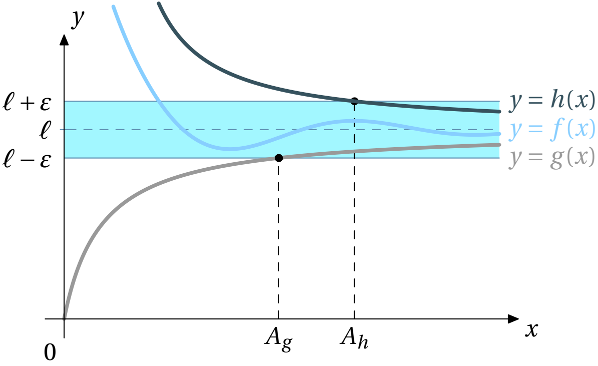
On veut prouver que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, donc on considère un réel positif A quelconque.
Puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il existe un réel M tel que, pour tout $x \geqslant M$, on a $f(x) \geqslant A$
De plus, pour tout $x \geqslant m$, on a $g(x) \geqslant f(x)$
Donc, si on appelle μ le plus grand des réels m et M, pour tout $x \geqslant \mu$, on a $g(x) \geqslant A$, ce qui exprime que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

□

Sommaire

Théorème (Théorème des gendarmes en l'infini)

Soient f, g et h des fonctions et ℓ et A deux réels.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$ et que $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ pour tout $x \geqslant A$,
alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$



Démonstration.

On fixe un réel $\varepsilon > 0$ quelconque.

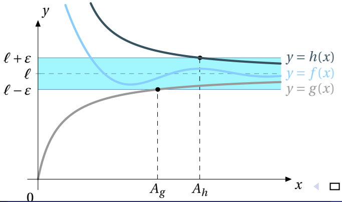
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$, il existe un réel A_g tel que, pour tout $x > A_g$ on a $g(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, i.e. $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, il existe un réel A_h tel que, pour tout $x > A_h$ on a $h(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, i.e. $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$

Soit M le plus grand des réels A_g, A_h et A, alors on on a simultanément pour tout $x > M$

$$\ell - \varepsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < \ell + \varepsilon$$

ce qui traduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



Démonstration.

On fixe un réel $\varepsilon > 0$ quelconque.

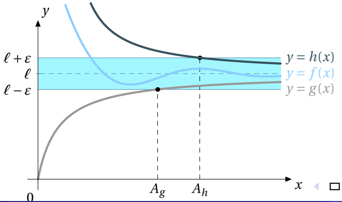
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$, il existe un réel A_g tel que, pour tout $x > A_g$ on a $g(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, i.e. $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, il existe un réel A_h tel que, pour tout $x > A_h$ on a $h(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, i.e. $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$

Soit M le plus grand des réels A_g, A_h et A, alors on on a simultanément pour tout $x > M$

$$\ell - \varepsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < \ell + \varepsilon$$

ce qui traduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

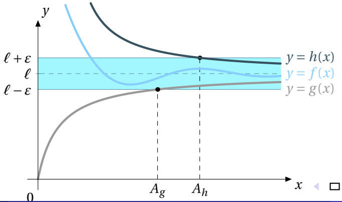


Démonstration.

On fixe un réel $\varepsilon > 0$ quelconque.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$, il existe un réel A_g tel que, pour tout $x > A_g$ on a $g(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, i.e. $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, il existe un réel A_h tel que, pour tout $x > A_h$ on a $h(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, i.e. $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$
Soit M le plus grand des réels A_g, A_h et A, alors on on a simultanément pour tout $x > M$

$$\ell - \varepsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < \ell + \varepsilon$$

ce qui traduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



Démonstration.

On fixe un réel $\varepsilon > 0$ quelconque.

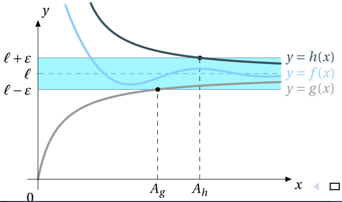
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$, il existe un réel A_g tel que, pour tout $x > A_g$ on a $g(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, i.e. $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, il existe un réel A_h tel que, pour tout $x > A_h$ on a $h(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, i.e. $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$

Soit M le plus grand des réels A_g, A_h et A, alors on on a simultanément pour tout $x > M$

$$\ell - \varepsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < \ell + \varepsilon$$

ce qui traduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



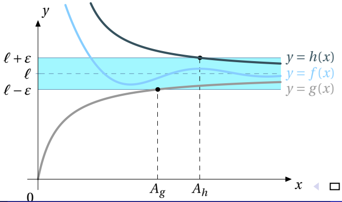
Démonstration.

On fixe un réel $\varepsilon > 0$ quelconque.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$, il existe un réel A_g tel que, pour tout $x > A_g$ on a $g(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, i.e. $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, il existe un réel A_h tel que, pour tout $x > A_h$ on a $h(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, i.e. $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$
Soit M le plus grand des réels A_g, A_h et A, alors on on a simultanément pour tout $x > M$

$$\ell - \varepsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < \ell + \varepsilon$$

ce qui traduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\square$



Théorème (Théorème des gendarmes)

Soient f, g et h des fonctions, ℓ et A deux réels et ω un réel ou l'infini.
Si $\lim\limits_{x\to\omega} g(x) = \lim\limits_{x\to\omega} h(x) = \ell$ et que $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ pour tout $x \geqslant A$, alors $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \ell$

Exemple

Étudions la limite de $f \ : \ x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ en $+\infty$.

Sommaire

Elles suivent le modèle réel avec un peu de logique derrière sauf dans quatre cas :

- $\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$

Elles suivent le modèle réel avec un peu de logique derrière sauf dans quatre cas :

- $\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$

Elles suivent le modèle réel avec un peu de logique derrière sauf dans quatre cas :

- $\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$

Elles suivent le modèle réel avec un peu de logique derrière sauf dans quatre cas :

- $\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$

Sommaire

Propriété

Soient ω, Ω *et* ℓ *des réels ou l'infini et* f *et* g *deux fonctions, alors*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\omega} f(x)=\Omega \\ \lim\limits_{T\to\Omega} g(T)=\ell\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim_{x\to\omega} g\circ f(x)=\ell$$

Exemple

Étudiez la limite en $-\infty$ de $\varphi \ : \ x \mapsto \sqrt{-3x+1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} -3x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{T\to+\infty} \sqrt{T} = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$$

Exemple

Étudiez la limite en $-\infty$ de $\varphi\ :\ x \mapsto \sqrt{-3x+1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} -3x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{T\to+\infty} \sqrt{T} = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$$

Exemple

Étudiez la limite en $-\infty$ de $\varphi\ :\ x \mapsto \sqrt{-3x+1}$

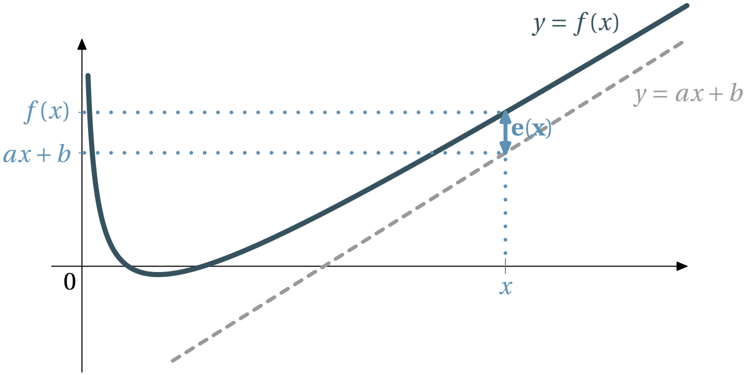
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} -3x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{T\to+\infty} \sqrt{T} = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$$

Sommaire

Définition

La courbe d'équation $y = f(x)$ admet la droite d'équation $y = ax + b$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$



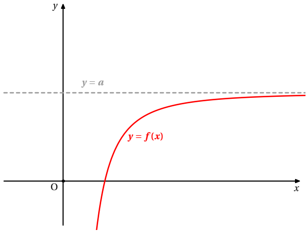
Sommaire

Définition

Si une fonction f vérifie

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de f.



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2.$$

Exemple

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + 1}.$$

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement ce résultat.

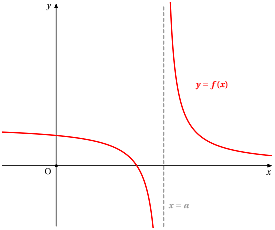
Sommaire

Définition

Soit a un réel. Si une fonction f vérifie

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.



$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty.$$

Exemple

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

Étudier les limites de f au voisinage de 1 puis interpréter graphiquement ce résultat.

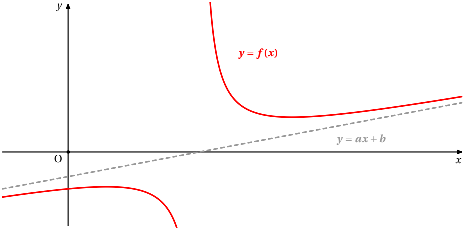
Sommaire

Définition

Soit Δ la droite d'équation $y = mx + p$. Si une fonction f vérifie

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + p)) = 0$$

alors la droite d'équation Δ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ à la courbe représentative de f.



$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + 2x - 1\,.$$

Prouver que la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

Sommaire

Exemple

$$x \neq 0,\ 3x^2 - 132x + 27 = x^2\left(3 - \frac{132}{x} + \frac{27}{x^2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{132}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{27}{x^2} = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3 - \dfrac{132}{x} + \dfrac{27}{x^2}\right) = 3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - 132x + 27 = +\infty$$

Exemple

$$x \neq 0,\ 3x^2 - 132x + 27 = x^2\left(3 - \frac{132}{x} + \frac{27}{x^2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{132}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{27}{x^2}=0\end{array}\right\}\overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{132}{x}+\frac{27}{x^2}\right)=3\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2-132x+27=+\infty$$

Exemple

$$x \neq 0,\ 3x^2 - 132x + 27 = x^2\left(3 - \frac{132}{x} + \frac{27}{x^2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{132}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{27}{x^2} = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3 - \frac{132}{x} + \frac{27}{x^2}\right) = 3 \\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - 132x + 27 = +\infty$$

Est-il vrai qu'une fonction strictement croissante tend forcément vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?

On pourrait le penser en effet : une fonction qui ne fait que croître va forcément monter vers $+\infty$. Et pourtant c'est FAUX !

Est-il vrai qu'une fonction strictement croissante tend forcément vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
On pourrait le penser en effet : une fonction qui ne fait que croître va forcément monter vers $+\infty$. Et pourtant c'est FAUX !

Est-il vrai qu'une fonction qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ est forcément croissante pour x assez grand ?

On pourrait le penser en effet : puisqu'il faut aller vers l'infini et au-delà, il va bien falloir monter sans s'arrêter. Et pourtant c'est FAUX !

Est-il vrai qu'une fonction qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ est forcément croissante pour x assez grand ?
On pourrait le penser en effet : puisqu'il faut aller vers l'infini et au-delà, il va bien falloir monter sans s'arrêter. Et pourtant c'est FAUX !

Est-il vrai qu'une fonction bornée tend forcément vers un réel en $+\infty$?

On pourrait le penser en effet : puisque la fonction est bornée, elle ne pourra aller vers l'infini, donc il faut qu'elle se stabilise quelque part. Et pourtant c'est FAUX !

Est-il vrai qu'une fonction bornée tend forcément vers un réel en $+\infty$? On pourrait le penser en effet : puisque la fonction est bornée, elle ne pourra aller vers l'infini, donc il faut qu'elle se stabilise quelque part. Et pourtant c'est FAUX !

Est-il vrai qu'une fonction tendant vers M en $+\infty$ est majorée par M

J'avoue que c'est difficile à croire, et pourtant la plupart des élèves tombent dans le panneau...

Est-il vrai qu'une fonction tendant vers M en $+\infty$ est majorée par M
J'avoue que c'est difficile à croire, et pourtant la plupart des élèves tombent dans le panneau...