DIXIÈME LEÇON

APPROCHE INTUITIVE DE L'INTÉGRATION

Où en sommes-nous ? Tout le monde le croyait mort : il est pourtant de retour. Mais trop longtemps prisonnier de la terrible tribu des fisyssiuns, Mathemator a adopté leur langage et semble avoir oublié sa rigueur mathématique...

I - LE PRINCIPE DE SOMMATION INFINIE

a. Qu'est-ce qu'une intégrale ?

Téhessin : Tout d'abord, je suis heureux de vous retrouver sain et sauf aprés ce terrible séjour chez les fizyssiuns.

Mathémator : Merci, cher disciple.

Téhessin : Avide de connaissances mathématiques, j'ai jeté un coup d'œil sur mon livre de Terminale pendant votre absence et j'ai cru comprendre qu'une intégrale était une aire.

Mathémator : C'est un point de vue Téhessin, mais pour bien appréhender la notion d'intégrale, il vaut mieux revenir à l'interprétation physique, le seul point de vue en termes d'aire est trop réducteur.

Les physiciens utilisent les intégrales pour calculer bien d'autres choses que des aires : une masse, une énergie, un volume ou encore un potentiel électrique peuvent s'écrire comme l'intégrale d'une fonction d'une variable sur un segment. Dans tous les cas, y compris celui du calcul d'aire, c'est la notion intuitive de sommation infinie qui permet de faire ce lien entre une grandeur physique et une intégrale. Pour vous faire une idée de ce qu'est une sommation infinie, je vous propose d'examiner ensemble trois exemples : un calcul de distance, un calcul d'aire et un calcul de volume.

b. Comment calculer la distance parcourue connaissant les vitesses instantanées ?

Mathémator : Supposez, Téhessin, que le compteur kilométrique de votre scooter soit en panne et que vous ne disposiez que du compteur des vitesses qui donne à tout instant t la vitesse arithmétique $v(t)$. Pouvez-vous calculer la distance ℓ parcourue entre deux instants t_1 et t_2 ?

Téhessin : Si la vitesse est constante et égale à v_0, on a $\ell = v_0\,(t_2 - t_1)$. Mais sinon..., je ne vois pas.

Mathémator : Eh bien sinon, on se ramène à des intervalles de temps « très petits » où la vitesse est « presque constante ». En cela, nous allons raisonner en physicien, le but étant d'avoir une bonne intuition de ce qu'est une intégrale, mais il ne faut pas croire que vous pourrez utiliser ce genre d'arguments dans un raisonnement mathématique. Je m'explique.
Nous allons imaginer que l'intervalle $[t_1, t_2]$ est découpé en une infinité de petits intervalles de temps de durée dt. Pendant l'un de ces intervalles $[t, t+dt]$, on parcourt approximativement la distance $v(t)\,dt$, car l'intervalle étant infiniment petit, on peut supposer que la vitesse est constante et égale à $v(t)$ entre t et $t+dt$. La distance totale ℓ correspond donc à la somme, en nombre infini, de ces distances infiniment petites, pour t variant de t_1 à t_2. En notation intégrale, cela s'écrit

$$\ell = \int_a^b v(t)\,dt.$$

Téhessin : Mais pourquoi utilise-t-on le symbole $\int$?

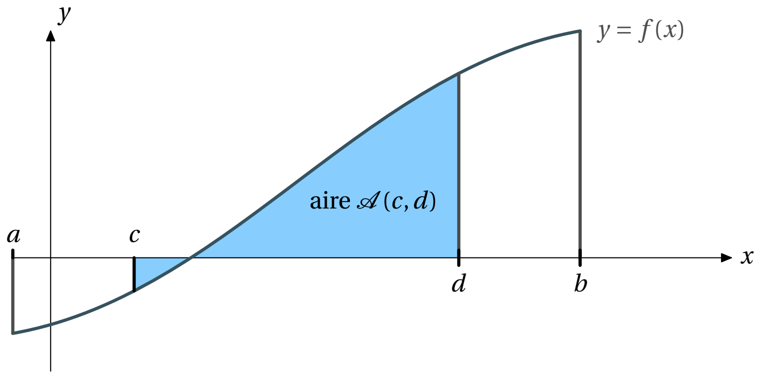
Mathémator : Parce qu'il représente le S de *summa* qui signifie somme en latin ; il a été inventé par Leibniz de même que les notations dt, dx... Vous voyez bien qu'une intégrale est avant tout une somme !

Téhessin : D'autre part, je ne vois pas bien quel sens précis on pourrait donner à cette somme en nombre infini de quantités infiniment petites...

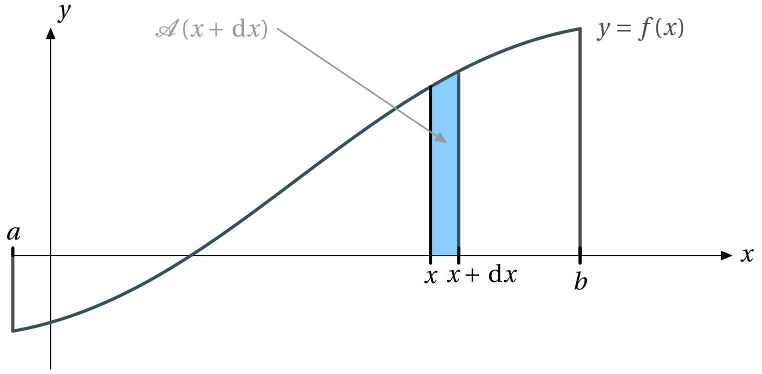
Mathémator : Il y a effectivement un vrai problème de définition. Mais vous ne saurez exactement ce que représente $\int_a^b v(t)\,dt$ que l'année prochaine. En attendant, voici d'autres exemples.

c. Quelle est l'aire délimitée par une courbe ?

Mathémator : Parlons un peu, Téhessin, de l'aire d'une portion de plan délimitée par la courbe représentative d'une fonction. On considère donc une fonction f continue sur $[a,b]$, et pour c et d dans $[a,b]$ avec $c<d$, on note $\mathscr{A}(c,d)$ l'aire de la portion de plan comprise entre les droites d'équations $x=c$, $x=d$, $y=0$ et la courbe d'équation $y=f(x)$.



Pour comprendre comment peut se calculer $\mathscr{A}(a,b)$, nous allons, comme pour le calcul de distance de tout à l'heure, découper l'intervalle $[a,b]$ en une infinité de petits intervalles de la forme $[x,x+dx]$ correspondant à une petite aire $\mathscr{A}(x,x+dx)$.



Téhessin : Et j'imagine qu'on va dire que $\mathscr{A}(a,b)$ est la somme en nombre infini des aires $\mathscr{A}(x,x+dx)$ infiniment petites pour x variant de a à b.

Mathémator : Quel talent !

Téhessin : J'ai compris le principe, mais en quoi suis-je avancé, une fois que j'ai fait ce découpage ? Je me retrouve avec une infinité de calculs à faire, au lieu d'un seul.

Mathémator : Certes, mais ce qui est intéressant, c'est qu'on peut donner une valeur approximative de $\mathscr{A}(x,x+dx)$. En effet, comme dx est infiniment petit, f est presque constante et égale à $f(x)$ sur tout l'intervalle $[x,x+dx]$. Donc $\mathscr{A}(x,x+dx)$ vaut à peu près l'aire d'un rectangle de base dx et de hauteur $f(x)$, c'est à dire $f(x)dx$.
Avec les mêmes notations que dans le problème précédent, on a donc, en faisant la somme pour x variant de a et b des aires infiniment petites $f(x)dx$

$$\mathscr{A}(a,b)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Voilà pourquoi un calcul d'aire peut se ramener à un calcul d'intégrale.

d. Quel est le volume intérieur à une sphère ?

Téhessin : Après la dimension 1 et la dimension 2, maintenant la dimension 3, c'est ça ?

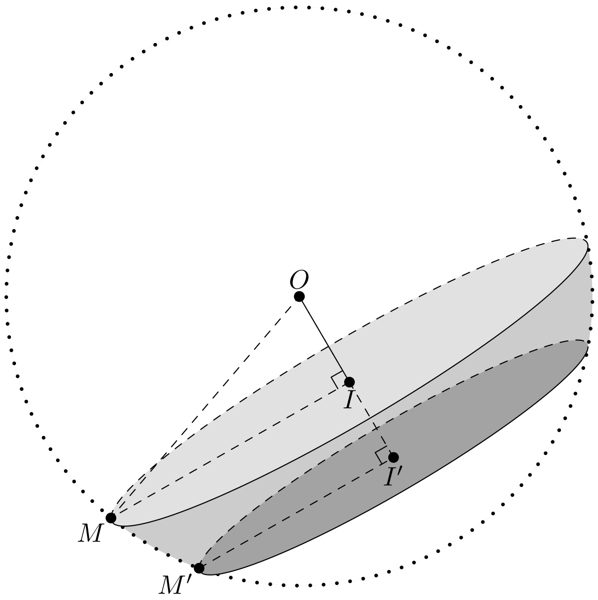
Mathémator : Oui, une distance, une aire, un volume sont en fait des *mesures* d'objets à une, deux ou trois dimensions. Et qui dit mesure, dit intégrale.

Téhessin : Vous allez donc exprimer le volume intérieur à une sphère comme une intégrale.

Mathémator : Effectivement, nous allons imaginer que l'intérieur de la sphère est découpé en une infinité de parties de volume infiniment petit, puis effectuer la somme de ces petits volumes. Il y a plusieurs manières de procéder : découper l'intérieur de la sphère en une infinité de sphères concentriques, comme des poupées russes, ou alors considérer qu'elle est composée de tranches horizontales infiniment fines.

Téhessin : Je préférerais les tranches Professeur, car je ne joue plus à la poupée.

Mathémator : Comme vous voulez. Alors commençons par supposer que la sphère a pour rayon R et pour équation dans un repère orthonormé $x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2$, et découpons.



Il faudrait maintenant « calculer » le volume de la tranche hachurée qui correspond aux points dont l'altitude est comprise entre z et $z + dz$. Et cette fois, Téhessin, en quoi va consister l'approximation ?

Téhessin : Facile, facile, je vais dire que cette tranche a un rayon constant puisque son épaisseur dz est infiniment petite, et donc c'est un cylindre.

Mathémator : Oui, poursuivez donc le calcul, je vois que vous êtes bien parti !

Téhessin : Cette tranche a approximativement pour volume $\pi r^2(z)\,dz$ où $r(z)$ est le rayon de la section d'altitude z. Il me reste à calculer $r(z)$, mais là, je suis un peu en panne. Un petit indice, Professeur ?

Mathémator : Il tient en un mot : Pythagore.

Téhessin : Merci, Professeur.
D'après le théorème de Pythagore, on a $r^2(z) + z^2 = \mathrm{R}^2$ et le volume total est donc

$$\mathrm{V} = \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \pi(\mathrm{R}^2 - z^2)\,dz.$$

Et j'ai fini !

Mathémator : Très bien, Téhessin, mais ça ne sera fini que lorsqu'on aura simplifié cette intégrale ! Cela se fait en utilisant les techniques de calcul d'intégrales à l'aide de primitives, et avec ces techniques, on obtient facilement la formule classique $\mathrm{V} = \dfrac{4}{3}\pi \mathrm{R}^3$.

e. Calcul de la longueur d'un arc

On considère la courbe d'équation $y = f(x)$. Imaginez un moyen d'obtenir la longueur de l'arc de cette courbe compris entre les points d'abscisse x_i et x_f.

II - EXERCICES : INTÉGRATION SANS PRIMITIVES

Exercice 1

Calculez les intégrales suivantes, après avoir fait un petit dessin.

$$\mathrm{I}_1 = \int_a^b k\,dx \text{ avec } k > 0 \qquad \mathrm{I}_2 = \int_0^4 (3-x)\,dx \qquad \mathrm{I}_3 = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Exercice 2

Dans cet exercice, vous pourrez utiliser les résultat suivant : $\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$ pour calculer certaines des intégrales proposées.

1. $\mathrm{I}_4 = \int_0^1 (5x^2+3x)\,dx$

2. $\mathrm{I}_5 = \int_{-1}^1 x^2\,dx$

3. $\mathrm{I}_6 = \int_{-1}^1 (x^2-3x+8)\,dx$

4. $\mathrm{I}_7 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^5 x\,dx$

Exercice 3

1. Prouvez que, pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{t^2}{2} \leqslant \dfrac{t^2}{1+t} \leqslant t^2$.

2. Déduisez-en un encadrement de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt$.

Exercice 4

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que, pour tout $x \in [0,1]$, il existe deux réels m et M tels que $m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$.
Déterminez la limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{1/n} f(x)\,dx$$

Exercice 5

Étudiez la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} e^{-x}\,dx$.
Vous pourrez commencer par encadrer e^{-x} sur $[n, n+1]$ en fonction de n.

Exercice 6

On pose $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Prouvez que $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$ et déduisez-en $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

III - Propriétés de l'intégrale

a. Relation de Chasles

Il s'agit de monter

Théorème 1 Relation de Chasles
Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, sur $[b, c]$ et sur $[a, c]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour s'en convaincre **intuitivement** , il suffit de penser « aire » et le cas des fonctions positives devient assez naturel.
On peut prouver ainsi les propriétés que vous connaissez bien : l'idée à retenir, même si vous verrez des définitions différentes l'an prochain, c'est que les propriétés de l'intégrale s'obtiennent **par passage à la limite** de sommes discrètes, c'est pourquoi elles ont posé problème aussi longtemps : il a fallu attendre plusieurs siècles pour avoir une définition correcte des limites. En ce qui vous concerne, vous vous contenterez de quelques mois...

Rappelons donc ces propriétés.

b. Autres propriétés

Propriété 1 Propriétés de l'intégrale
Avec f et g des fonctions intégrables sur $[a, b]$,

- ▷ $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- ▷ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
- ▷ $\displaystyle\int_a^b \left[\lambda f(x) + \mu g(x)\right]\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ avec λ et μ des réels : c'est la linéarité de l'intégrale.
- ▷ $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a\,;\,b] \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- ▷ $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a\,;\,b] \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$: c'est la croissance de l'intégrale.
- ▷ $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b \left|f(x)\right|\,\mathrm{d}x$: c'est l'inégalité triangulaire appliquée aux intégrales.

IV - Valeur moyenne

a. Définition

La moyenne d'un nombre entier de valeurs est facile à obtenir : il suffit d'additionner ces valeurs et de les diviser par leur nombre

$$m_n(f) = \frac{f(a_0) + f(a_1) + \cdots + f(a_{n-1})}{n}$$

On pense tout naturellement à passer à la limite et à remplacer la somme discrète par une intégrale. Mais attention : ceci n'est valable que si la subdivision n'est pas trop irrégulière. On pourrait imaginer en effet que la subdivision prenne une infinité

de valeurs entre a et $(b-a)/2$ et aucune ailleurs mis à part b, alors $m_n(f)$ ne pourrait pas représenter une approximation convenable d'une moyenne. Nous continuerons donc à considérer des subdivisions régulières.
Nous admettrons donc le résultat suivant

Théorème 2 Valeur moyenne
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ une subdivision **régulière** de $[a,b]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a_k)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

On appelle $\mu=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la valeur moyenne de f sur $[a,b]$

Vous pouvez retenir également qu'intuitivement, la valeur moyenne est une sorte de somme des valeurs de $f(x)$ affectées des coefficients $\mathrm{d}x$ le tout divisé par la somme des coefficients $\mathrm{d}x$. Or on a déjà montré que

$$\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$$

et on retrouve intuitivement le résultat.

b. Est-ce que la valeur moyenne est une valeur prise par la fonction ?

Ça n'a rien d'évident a priori, puisque vous pouvez avoir 15 de moyenne en n'ayant jamais eu de note égale à 15 (14 et 16 par exemple).
Et pourtant c'est vrai pour les fonctions continues comme nous allons le prouver : comme quoi le passage à la limite du discret au continu présente quelques dangers !

Comme notre fonction f est continue sur $[a,b]$, elle est bornée, donc il existe deux réels m et M tels que, pour tout $x\in[a\,;\,b]$

$$m\leqslant f(x)\leqslant \mathrm{M}$$

Alors, on obtient successivement

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b \mathrm{M}\,\mathrm{d}x$$
$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant \mathrm{M}(b-a)$$

et finalement

$$m\leqslant\mu\leqslant\mathrm{M}$$

Donc μ appartient à l'intervalle image de f[a] : il existe donc un réel $x_0\in[a,b]$ tel que $f(x_0)=\mu$.

Théorème 3 Formule de la moyenne
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, alors il existe un réel $x_0\in[a,b]$ tel que

$$f(x_0)=\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 1 : le rectangle de dimensions μ et $b-a$ a la même aire que celle définie par la courbed'quation $y=f(x)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Remarque 2 : la formule s'écrit aussi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)f(x_0)$ ce qui constitue un résultat très utile, puisqu'il permet de remplacer « une intégrale » en une expression « plus simple ».

[a] C'est à dire $f([a\,;\,b])$

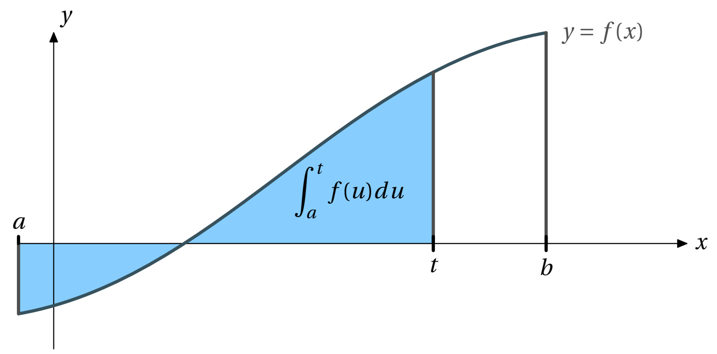
V - Primitive et intégrale

a. Intégrale fonction de sa borne supérieure

Considérons une fonction f que nous supposerons continue sur un intervalle $[a,b]$ pour simplifier notre propos.
On peut donc définir une fonction S sur $[a,b]$ telle que

$$\mathrm{S} : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u \end{array}$$

Du point de vue graphique, on peut interpréter $\mathrm{S}(t)$ comme l'aire algébrique du domaine bleu :



b. Comment retrouver f connaissant S : $t \mapsto \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$?

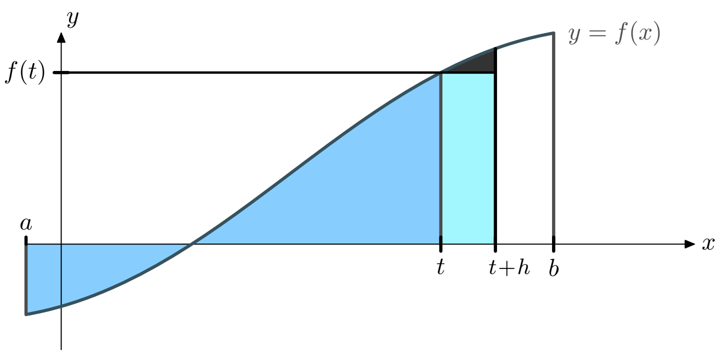
Rappelons d'abord la définition d'une primitive :

Définition 1 Primitive
Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. Alors F **est une primitive de** f lorsque F est dérivable sur I et que $\mathrm{F}' = f$

Nous allons donc essayer de retrouver f connaissant S.

Approche intuitive

On fixe t dans $[a,b[$ et on considère un « petit » réel strictement positif h. Observons ce qui se passe sur le « petit » intervalle $[t,t+h]$



On « voit » que, pour h petit, l'aire noire est « petite » devant l'aire bleue du rectangle situé en dessous. Cela donne

$$\mathrm{S}(t+h) - \mathrm{S}(t) = h \times f(t) + \text{aire noire} \approx h \times f(t)$$

et donc

$$\frac{\mathrm{S}(t+h) - \mathrm{S}(t)}{h} \approx f(t)$$

Ainsi, le taux d'accroissement de S entre t et h « ressemble » à $f(t)$ quand h est « petit ».
On « sent » donc que S est dérivable en t et que $\mathrm{S}'(t) = f(t)$ et donc que S est une primitive de f, ce qui crée le lien bien connu entre primitive et intégrale.
Il reste à prouver cette intuition.

Preuve de notre intuition

Nous allons utiliser la formule de la moyenne vue précédemment appliquée à la fonction f continue sur $[t, t+h]$. Cela donne qu'il existe un réel t_h[b] tel que

$$\frac{1}{t+h-t}\int_t^{t+h} f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{h}\times\big(\mathrm{S}(t+h)-\mathrm{S}(t)\big) = f(t_h)$$

C'est à dire que

$$\frac{\mathrm{S}(t+h)-\mathrm{S}(t)}{h} = f(t_h)$$

Or f est continue sur $[t, t+h]$, donc quand h tend vers 0, $f(t_0)$ tend vers $f(t)$ et donc S est dérivable à droite en t, et

$$\mathrm{S}'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{S}(t+h)-\mathrm{S}(t)}{h} = f(t)$$

Il resterait à faire la même preuve pour h négatif pour avoir la dérivabilité tout court.
On obtient donc le résultat suivant

Théorème 4 Théorème fondamental

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit

$$\mathrm{S}: \begin{array}{rcl} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u \end{array}$$

alors S est dérivable sur $[a, b]$ et $\mathrm{S}' = f$

c. Comment calculer une intégrale à l'aide d'une primitive ?

Rappelons une propriété bien connue

Propriété 2

Deux primitives d'une même fonction définie sur un intervalle diffèrent d'une constante

En effet, si F et G sont deux primitives de f sur I, alors $\mathrm{F}' = \mathrm{G}' = f$ et donc $\mathrm{F}' - \mathrm{G}' = (\mathrm{F}-\mathrm{G})' = 0$. La fonction $\mathrm{F}-\mathrm{G}$ est donc constante sur I et il existe un réel k tel que $\mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(x) = k$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

Soit donc F une primitive de f. Comme la fonction S est elle aussi une primitive de f, il existe donc un réel k constant tel que $\mathrm{S}(t) = \mathrm{F}(t) + k$ pour tout $t \in [a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{S}(b)-\mathrm{S}(a) = \big(\mathrm{F}(b)+k\big) - \big(\mathrm{F}(a)+k\big) = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$$

Propriété 3 Intégrale et primitive

Soit F une primitive d'une fonction f continue sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$$

[b] t_h dépend bien sûr de h

d. Intégrations par parties

Nous n'avons que peu de méthodes d'intégration en terminale. Une des plus importantes est l'intégration par parties.
Si u et v sont deux fonction dérivables sur $[a,b]$ de dérivées u' et v' contiues sur $[a,b]$, alors $(uv)' = u'v + uv'$ soit encore $u'v = (uv)' - uv'$ et donc

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

VI - ÉNONCÉS DES EXERCICES

Exercice 7 Quizz

1. **Vrai ou faux ?** L'intégrale d'une fonction continue et impaire est nulle.
2. **Vrai ou faux ?** Si $\int_{-2}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est impaire.
3. Trouvez une fonction paire, non identiquement nulle sur $[-2,2]$, telle que $\int_{-2}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
4. **Vrai ou faux ?** Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors $\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
5. Trouvez une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$
6. Trouvez une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = 32$
7. **Vrai ou faux ?**Soit u un réel strictement positif, alors $\int_0^u \mathrm{E}(x)\,dx \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(x)$ désignant la *partie entière* de x.
8. Trouvez une fonction telle que $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)\,\mathrm{d}t|$
9. Trouvez une fonction f telle que $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \int_a^b |f(t)\,\mathrm{d}t|$
10. Trouvez une *condition nécessaire et suffisante* sur f pour que $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)\,\mathrm{d}t|$
11. **Vrai ou faux ?** $\int_2^3 xt^2\,\mathrm{d}t = \int_2^3 xt^2\,dx$
12. **Vrai ou faux ?** $\int_2^3 xt^2\,\mathrm{d}t = \int_2^3 x^2 t\,dx$
13. Trouvez deux fonctions f et g continues sur $[1,2]$, distinctes, telles que $\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 g(u)\,du$
14. **Vrai ou faux ?** Si f est bornée sur $[a,b]$, alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(u)\,du$ l'est aussi.
15. **Vrai ou faux ?** Si f est croissante sur $[a,b]$, alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(u)\,du$ l'est aussi.
16. Déterminez une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et dont la valeur moyenne sur $[-2\,;\,2]$ est 0.

Exercice 8 Calculs de primitives

Calculez une primitive de f_i dans les cas suivants :

1. $f_1(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}$
2. $f_2(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
3. $f_3(x) = \tan x$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

Exercice 9 Calculs d'intégrales

Calculez les intégrales suivantes

1. $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_1^2 3(x-1)^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$

2. $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

3. $\mathrm{I}_3 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$

4. $\mathrm{I}_4 = \displaystyle\int_1^3 \frac{x+1}{x}(\ln(x)+x)^3\,\mathrm{d}x$

5. $\mathrm{I}_5 = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

6. $\mathrm{I}_6 = \displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice 10 Primitives des puissances de cos et sin

1. Calculez $\cos x$ en fonction de e^{ix} et e^{-ix}.

2. Déduisez-en une expression de $\cos^5 x$ comme combinaison linéaire de $\cos(kx)$ avec $k \in [\![0,5]\!]$.

3. Calculez $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^5 t\, dt$

Exercice 11 Limites de suites définies par une intégrale

1. À l'aide de majorations ou d'encadrements, déterminez la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

1. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int_0^2 \frac{x^{2n}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int_1^{1+1/n} \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$

e) $\int_0^{\pi} \frac{n\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x$ en commençant par majorer $\int_0^{\pi}\left(\dfrac{n\sin x}{x+n} - \sin x\right)\mathrm{d}x$

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable et de dérivée continue. Montrez que

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = f(1)$$

à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 12 Transformée de Laplace de la fonction rampe

On pose $\mathrm{I}(t) = \displaystyle\int_0^t t\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x$ où p est un paramètre réel. Calculez $\mathrm{I}(t)$ puis $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{I}(t)$ en discutant selon les valeurs du paramètre p.

Exercice 13 Transformée de Fourier du signal $s(t) = \cos(\pi t)\Pi(t)$

Il s'agit de calculer l'intégrale $\mathrm{X}(s) = 2\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi t)\cos(2\pi f t)\,\mathrm{d}t$ où f est un paramètre positif.

Exercice 14 Lemme de Gronwall

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \geqslant 0$

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrez que f est identiquement nulle. On pourra introduire la fonction

$$g\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et étudiez ses variations. Vous montrerez en particulier que g est identiquement nulle.

Exercice 15 Développement en série entière de $\ln(1-x)$

Soit $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrez que, pour tout $t \in [0,x]$, on a

$$\left|\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k\right| \leqslant \frac{t^{n+1}}{1-x}.$$

2. Soit $x \in [-1,0]$. Montrez que pour tout $t \in [x,0]$ $\left|\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k\right| \leqslant |t|^{n+1}$.

3. Soit $x \in [-1,1[$. Déduisez des questions précédentes que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x)$$

On obtient ainsi ce qu'on appelle un développement en série entière de $\ln(1-x)$: on « remplace » une fonction compliquée par une sorte de « polynôme infini » à coefficients entiers. Cela permet dans certains cas de simplifier des calculs (si si !). Vous verrez ça plus tard.

Exercice 16 Le problème de l'ivrogne

Nous nous proposons ici d'étudier le problème crucial suivant. Un ivrogne part à un instant donné d'un point donné. À chaque seconde, il fait un pas dans une direction inconnue (et qui peut changer de façon arbitraire à chaque pas). Comme il se fatigue, ses pas sont de plus en plus courts. Peut-on prévoir qu'au bout d'un certain temps il restera à moins d'un mètre d'une certaine position si on admet que la longueur de son n-ième pas est $1/n$ mètre ? $1/n^2$ mètre ?

Étude de la convergence d'une série[c]

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un réel ℓ. On considère la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ des termes de rang pair de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrez, à l'aide de la définition de la convergence d'une suite, que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Quel est le lien avec l'ivrogne ?

3. Exprimez $S_{2N} - S_N$. Quel est le plus petit terme de cette somme. Déduisez-en que $S_{2N} - S_N \geqslant 1/2$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

4. Supposons maintenant que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ. En utilisant le résultat précédent et les propriétés des opérations sur les limites, montrez qu'on arrive à prouver que $0 \geqslant 1/2$. Qu'en concluez-vous sur $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

5. Résolvez alors le premier problème de l'ivrogne.

Utilisation du logarithme népérien et des suites adjacentes On cherche maintenant à estimer la distance parcourue par l'ivrogne faisant des pas de longueur $1/n$, même si l'on sait qu'elle tend vers l'infini.

1. On définit deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = S_n - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad w_n = S_n - \ln n$$

a) Montrez que, pour tout $t \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+t) \leqslant t$.

b) Prouvez alors que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

c) Montrez que leur limite commune γ appartient à l'intervalle $]0,1[$.

2. Montrez qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

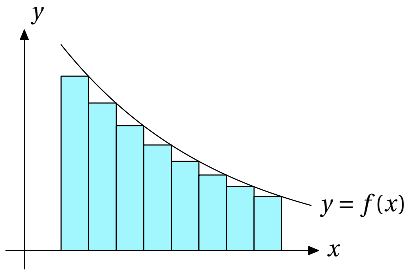
$$S_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n \qquad \text{avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

3. Donnez, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. Donnez également une approximation de la distance parcourue par l'ivrogne au bout de 24 heures.

[c] Une série est une suite (s_n) de terme général $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, avec u_k une suite.

Comparaison série - intégrale On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=1/x^2$.

1. En utilisant le schéma



la relation de Chasles et la décroissance de f, montrez que

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leqslant \int_1^N f(x)\,dx$$

2. On pose $S'_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$. En utilisant la question précédente, prouvez que la suite $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On notera L la limite.

3. En utilisant judicieusement des petits rectangles, un peu comme tout à l'heure, montrez que

$$\int_{N+1}^{K+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{p=N+1}^{K} f(p) \leqslant \int_{N}^{K} f(t)\,dt$$

4. Soit F une primitive de f sur $]0,+\infty[$ telle que $\lim_{x\to+\infty} F(x)=0$. En utilisant la double inégalité précédente, montrez que

$$-F(N+1) \leqslant L-\sum_{p=1}^{N} f(p) \leqslant -F(N)$$

5. Déduisez-en une valeur approchée de L à 10^{-2} près.

6. Que peut-on en déduire pour l'ivrogne ?

VII - EXERCICES DE BAC

Exercice 17

Question de cours

Prérequis : positivité et linéarité de l'intégrale.

Soient a et b deux réels d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur I telles que pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A

1. Soit x un éel supérieur ou égal à 1.
Calculer en fonction de x l'intégrale $\int_1^x (2-t)\,\mathrm{d}t$.

2. Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, on a : $2-t \leqslant \frac{1}{t}$.

3. Déduire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2} \leqslant \ln x.$$

Partie B

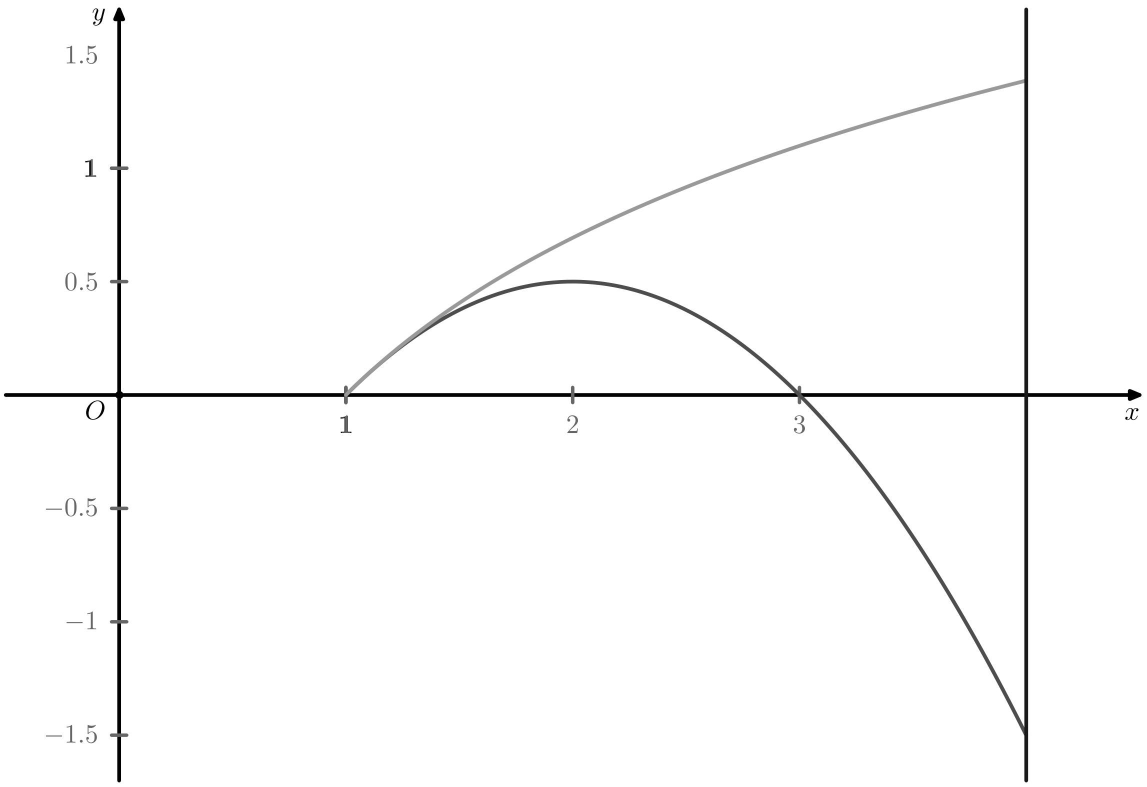
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$.

Sur le graphique joint en annexe, le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1 ; 4]$. On a a tracé également la droite (d) d'équation $x = 4$.

1. a) Démontrer que $\int_1^4 h(x)\mathrm{d}x = 0$.

b) Illustrer sur le graphique le résultat de la question précédente.

2. On note (D) le domaine du plan délimité par la droite (d) et les courbes représentatives des fonction h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1 ; 4]$.
En utilisant un intégration par parties, calculer l'aire de (D) en unités d'aire.



Exercice 18 ROC : intégrale - primitive

On considère la fonction f, définie sur $[1 ; +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t}.$$

1. a) Justifier la continuité de f sur $[1 ; +\infty[$.

b) Montrer que f est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

2. Restitution organisée de connaissances

On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

Pour tout réel x_0 de $[1 ; +\infty[$, on note $\mathscr{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.

On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1 ; +\infty[$ est une primitive de f.

a) Que vaut $\mathscr{A}(1)$?

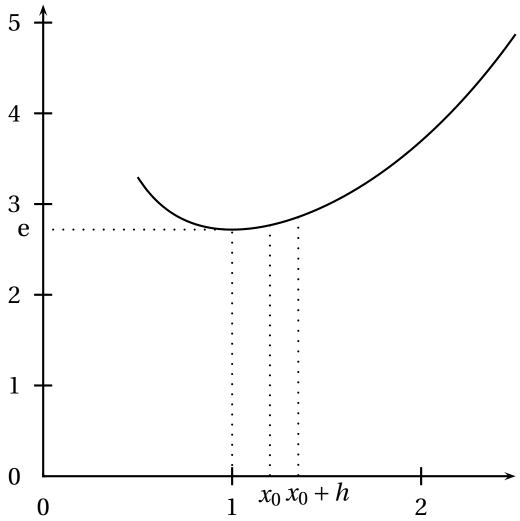
b) Soit x_0 un réel quelconque de $[1\ ;\ +\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h).$$

c) Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geqslant 1$?

d) En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$ ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$.

e) Conclure.



Exercice 19 Style bac avec Roc

Le but de l'exercice est d'établir dans un cas particulier le lien existant entre aire sous la courbe et primitive. On prendra comme prérequis la définition suivante :

Définition : H est une primitive de h sur $[a\ ;\ b]$ si et seulement si H est dérivable sur $[a\ ;\ b]$ et si pour tout x de $[a\ ;\ b]$ on a $\mathrm{H}'(x) = h(x)$.

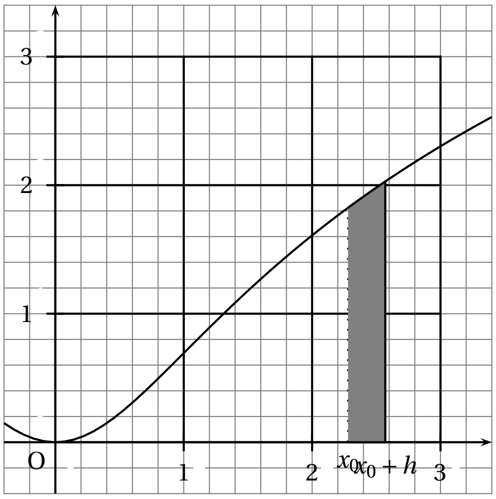
Dans la suite on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \ln\left(t^2+1\right)$$

1. Expliquer pourquoi f est continue sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$.

La fonction f est représentée ci-dessous :



Pour $\alpha \geqslant 0$, on note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire de la portion de plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et la droite d'équation $x = \alpha$.

3. a) Soit x_0 et h des réels strictement positifs. En utilisant un rectangle convenablement choisi, établir l'encadrenent

$$\ln\left(1+x_0^2\right) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x_0+h)-\mathscr{A}(x_0)}{h} \leqslant \ln\left[1+(x_0+h)^2\right].$$

b) Quel encadrement peut-on obtenir de la même manière pour $h<0$ et $h \geqslant -x_0$?

c) **Démontrer** que $\mathscr{A}$ est dérivable en x_0. Quel est le nombre dérivé de $\mathscr{A}$ en x_0 ?

4. Expliquer pourquoi $\ln(2) \leqslant \mathscr{A}(2) \leqslant 2\ln(5)$.

Exercice 20 Roc again

1. On considère la fonction numérique f définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.
Pour tout réel $\alpha \geqslant 1$, on considère les intégrales 'i

$$\mathrm{J}(\alpha) = \int_\alpha^{2\alpha} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{K}(\alpha) = \int_\alpha^{2\alpha} \frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

Le but de l'exercice est d'étudier, sans chercher à la calculer, l'intégrale $\mathrm{K}(\alpha)$.

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Étudier le sens de variation de f

c) Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

2. a) Interpréter géométriquement le nombre $\mathrm{K}(\alpha)$.

b) Soit $\alpha \geqslant 1$, montrer que

$$\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \leqslant \mathrm{K}(\alpha) \leqslant \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

c) En déduire que

$$\frac{1}{2} \leqslant \mathrm{K}(\alpha) \leqslant \mathrm{e}.$$

3. a) Calculer $\mathrm{J}(\alpha)$.

b) Démontrer que pour tout réel $\alpha \geqslant 1$

$$\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\ln(2) \leqslant \mathrm{K}(\alpha) \leqslant \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)\ln(2).$$

4. **Démonstration de cours.**
Prérequis : Définition de la limite d'une fonction en $+\infty$.
Démontrer le théorème suivant :
Soient u, v et w des fonctions définies sur $[1\,;\,+\infty[$ telles que pour tout réel $x \geqslant 1$, $u(x) \leqslant (v(x) \leqslant w(x)$.
S'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} w(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = l$.

5. Déduire de ce qui précède la limite de $\mathrm{K}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

Exercice 21 Let's Roc

Partie A

On considère la fonction nutnérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{1-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe representative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra pour cela justifier et exploiter l'écriture pour tout x réel strictement positif : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{\sqrt{x}} \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\Big)$. Interpréter graphiquement le résultat.

2. Démontrer que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ puis calculer $f'(x)$.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f.

4. Construire la courbe $\mathscr{C}$ (unité graphique : 2 cm). On admettra que $\mathscr{C}$ est tangente en O à l'axe des ordonnées.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Interpréter géométriquement u_n.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.

3. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

4. Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Partie C

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. a) Démontrer que F est dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ et calculer $\mathrm{F}'(x)$.

b) En déduire le sens de variations de F.

2. a) Démontrer que pour tout réel t positif : $t+2 \geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{t}$.

b) En déduire que pour tout x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$:

$$\mathrm{F}(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^x (t+2)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout x appartenant à $[1\ ;\ +\infty[$:

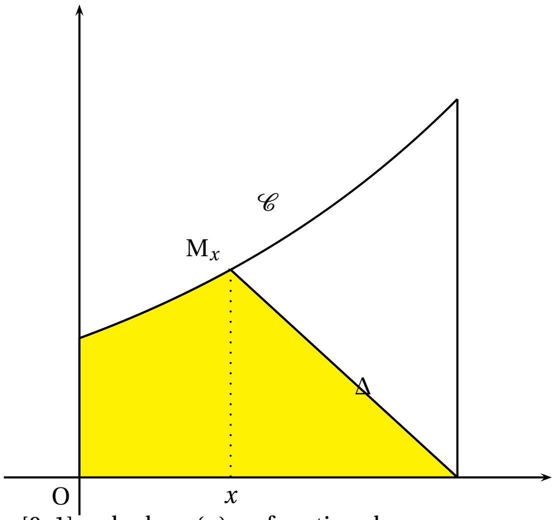
$$\int_0^x (t+2)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t = 4 - (x+3)\mathrm{e}^{1-x}.$$

d) En déduire que pour tout x appartenant à $[1\ ;\ +\infty[$: $0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \sqrt{2}$.

3. On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n la somme des $n-1$ premiers termes de la suite (u_n). Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale. Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 22 Partage équitable

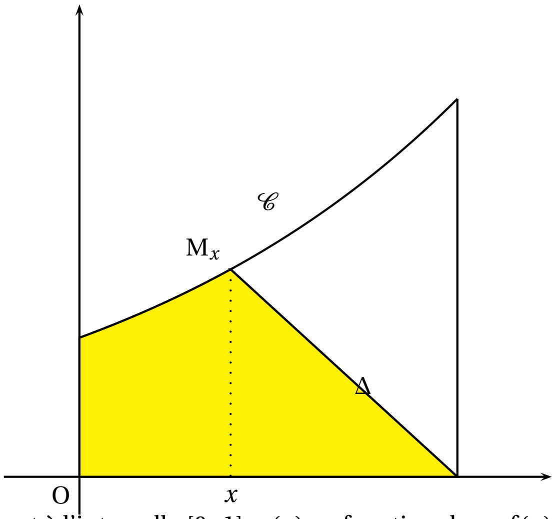
Le plan est rapporté à un repère orthonormal.
On note I le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.
Soient f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f'x) = \mathrm{e}^{x-1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On note Δ la portion de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.
Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'un unique réel α appartenant à $[0\ ;\ 1]$ tel que, si A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse α, le segment [IA] partage Δ en deux régions de même aire.
Pour tout x appartenant à $[0\ ;\ 1]$ on note M_x le point de coordonnées $\big(x,\ f(x)\big)$ et T_x le domaine délimité par la droite IM_x, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathscr{C}$.
On désigne par $g(x)$ l'aire de T_x.



1. Pour x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, calculer $g(x)$ en fonction de x.
2. Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto g(x)$ sur $[0 ; 1]$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α de $[0 ; 1]$ tel que $g(\alpha)$ soit égal à la moitié de l'aire de Δ.
4. Trouver une valeur approchée de α à 10^{-3} près par défaut.

Exercice 23 Partage équitable avec Roc

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.
On note I le point de coordonnées $(1 ; 0)$.
Soient f une fonction positive, strictement croissante et dérivable sur $[0 ; 1]$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et Δ la portion de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'un unique réel α appartenant à $[0 ; 1]$ tel que, si A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse α, le segment [IA] partage Δ en deux régions de même aire.
Pour tout x appartenant à $[0 ; 1]$ on note M_x le point de coordonnées $\left(x, f(x)\right)$ et T_x le domaine délimité par la droite IM_x, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathscr{C}$.
On désigne par F la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ et par $g(x)$ l'aire de T_x.



1. Exprimer, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$, $g(x)$ en fonction de x, $f(x)$ et $F(x)$.
2. **Démonstration de cours** Démontrer que F est dérivable et a pour dérivée f.
3. Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto g(x)$ sur $[0 ; 1]$.
4. a) Par des considérations d'aires, montrer que $g(0) \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.
   b) Montrer qu'il existe un unique réel α de $[0 ; 1]$ tel que $g(\alpha)$ soit égal à la moitié de l'aire de Δ.

Exercice 24 Un peu d'imagination...

Les questions sont indépendantes. II est demandé de justifier toutes les réponses fournies.

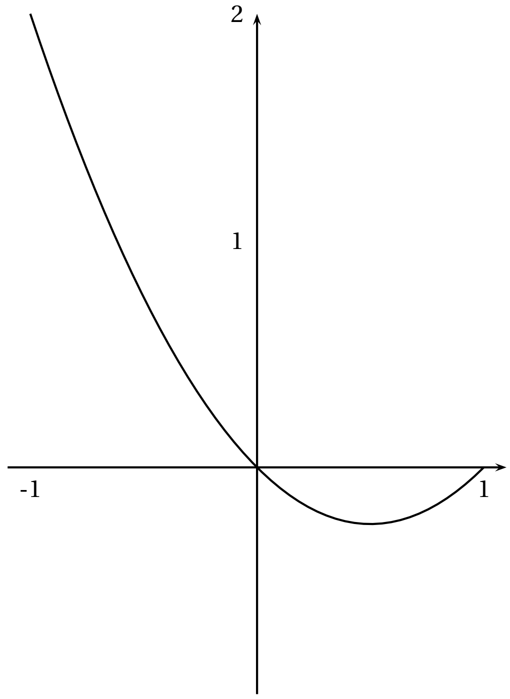
1. Dans chacun des cas suivants, proposer une fonction f qui vérifie les propriétés données.
On donnera l'expression de $f(x)$.

a) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ae^{2x} + be^{x} + c$, la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ et l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, 0 et $\ln 2$.

b) f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$, $f(2) = 4$ et, pour tout x et tout y réels strictement positifs, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

c) f est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et la valeur moyenne de f sur $[-2\,;\,2]$ est 0.

2. Soit g une fonction définie et dérivable, de dérivée g' continue sur $[-1\,;\,1]$. La courbe représentative de g est donnée ci-dessous.



Les affirmations suivantes sont-elles cohérentes avec le schéma :

a) $\displaystyle\int_0^1 g'(x)\,\mathrm{d}x = 0$?

b) $\displaystyle\int_0^1 g'(x)\,\mathrm{d}x \geqslant -\frac{1}{2}$?

Exercice 25 Suite définie par une intégrale

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction $f\,:\, t \longmapsto (2-t)e^t$ est une primitive de $g\,:\, t \longmapsto (1-t)e^t$ sur $[0\,;\,1]$.
En déduire la valeur de u_1.

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{(R)}$$

Partie B
On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.
Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par le deuxième calculatrice
1	$7,1828182845\text{E}{-}01$	$7,1828182846\text{E}{-}01$
2	$4,3656365691\text{E}{-}01$	$4,3656365692\text{E}{-}01$
3	$3,0969097075\text{E}{-}01$	$3,0969097076\text{E}{-}01$
4	$2,3876388301\text{E}{-}01$	$2,3876388304\text{E}{-}01$
5	$1,9381941508\text{E}{-}01$	$1,9381941520\text{E}{-}01$
6	$1,6291649051\text{E}{-}01$	$1,6291649120\text{E}{-}01$
7	$1,4041543358\text{E}{-}01$	$1,4041543840\text{E}{-}01$
8	$1,2332346869\text{E}{-}01$	$1,2332350720\text{E}{-}01$
9	$1,0991121828\text{E}{-}01$	$1,0991156480\text{E}{-}01$
10	$9,9112182825\text{E}{-}02$	$9,9115648000\text{E}{-}01$
11	$9,0234011080\text{E}{-}02$	$9,0272128000\text{E}{-}02$
12	$8,2808132963\text{E}{-}02$	$8,3265536000\text{E}{-}02$
13	$7,6505728522\text{E}{-}02$	$8,2451968000\text{E}{-}02$
14	$7,1080199309\text{E}{-}02$	$1,5432755200\text{E}{-}01$
15	$6,6202989636\text{E}{-}02$	$1,3149132800\text{E}{+}00$
16	$5,9247834186\text{E}{-}02$	$2,0038612480\text{E}{+}01$
17	$7,2131811612\text{E}{-}03$	$3,3965641216\text{E}{+}02$
18	$-8,7016273909\text{E}{-}01$	$6,1128154189\text{E}{+}03$
19	$-1,7533092042\text{E}{+}01$	$1,1614249296\text{E}{+}05$
20	$-3,5166184085\text{E}{+}02$	$2,3228488592\text{E}{+}06$
21	$-7,3858986580\text{E}{+}03$	$4,8779825043\text{E}{+}07$
22	$-1,6249077047\text{E}{+}05$	$1,0731561499\text{E}{+}09$
23	$-3,7372887209\text{E}{+}06$	$2,4682591448\text{E}{+}10$
24	$-8,9694930302\text{E}{+}07$	$5,9238219474\text{E}{+}11$
25	$-2,2423732585\text{E}{+}09$	$1,4809554869\text{E}{+}13$

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Partie C
Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } \; u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant 0$.

2. a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel non nul n

$$(1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times (1-t)^n.$$

b) En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie D
Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n).

$$u_{n+1} = (n+1)\,u_n - 1$$

Étant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = a \quad \text{et pour tout entier naturel non nul } n,\ v_{n+1} = (n+1)\,v_n - 1.$$

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)(a+2-\mathrm{e})$ où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.
2. Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a.
(On rappelle que $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$.)
3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

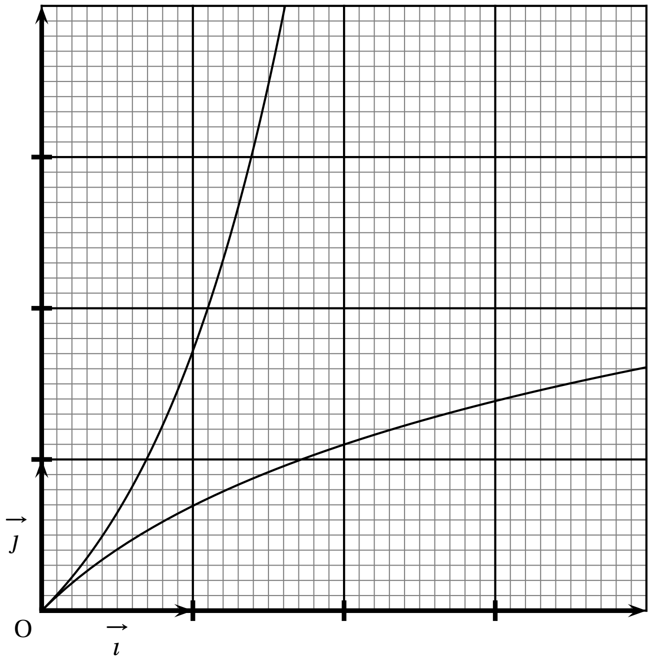
Exercice 26

On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$. Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par le candidat,

1. Vérifier que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune au point O(0 ; 0). Préciser la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.
2. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
3. Soit a un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre $\mathrm{I}(a) = \displaystyle\int_0^a \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.
   a) En utilisant des considérations d'aires, démontrer que
   $$\mathrm{I}(a) = a\ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\mathrm{d}x.$$
   b) En déduire la valeur de $\mathrm{I}(a)$.
   c) Retrouver la valeur de $\mathrm{I}(a)$ en effectuant une intégration par parties.



Exercice 27 Constante d'Euler

1. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0\,;1]$:

$$\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2}\leqslant\frac{1}{x+n}\leqslant\frac{1}{n}.$$

2. a) Calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+n}\,\mathrm{d}x$.

b) Déduire en utilisant **1.**, que :

$$\text{pour } n\in\mathbb{N}^*\quad \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\leqslant\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\qquad(1)$$

$$\text{puis que}\quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}.$$

3. On appelle U la suite définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par :

$$\mathrm{U}(n)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n).$$

Démontrer que U est décroissante (on pourra utiliser **2. b.**.)

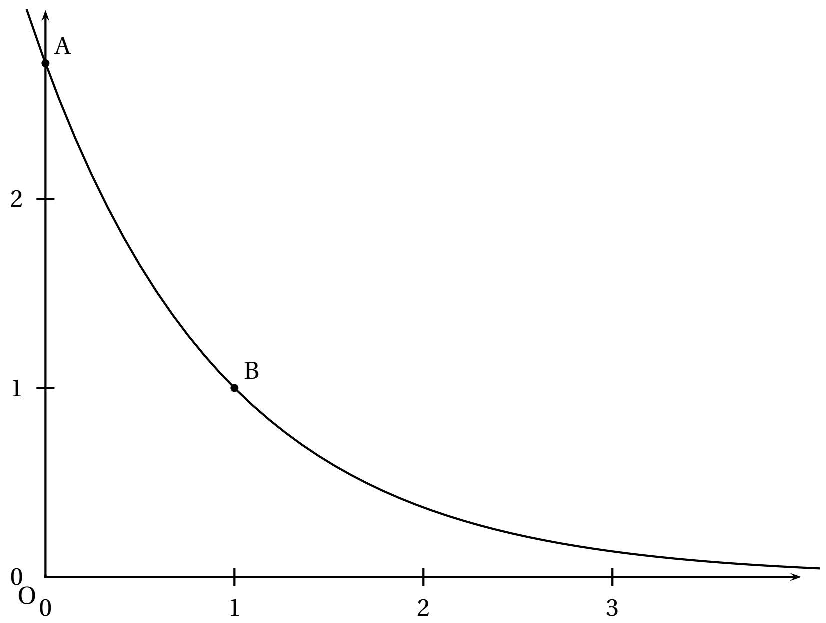
4. On désigne par V la suite de terme général :

$$\mathrm{V}(n)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1).$$

Démontrer que V est croissante.

5. Démontrer que U et V convergent vers une limite commune notée γ.
Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.

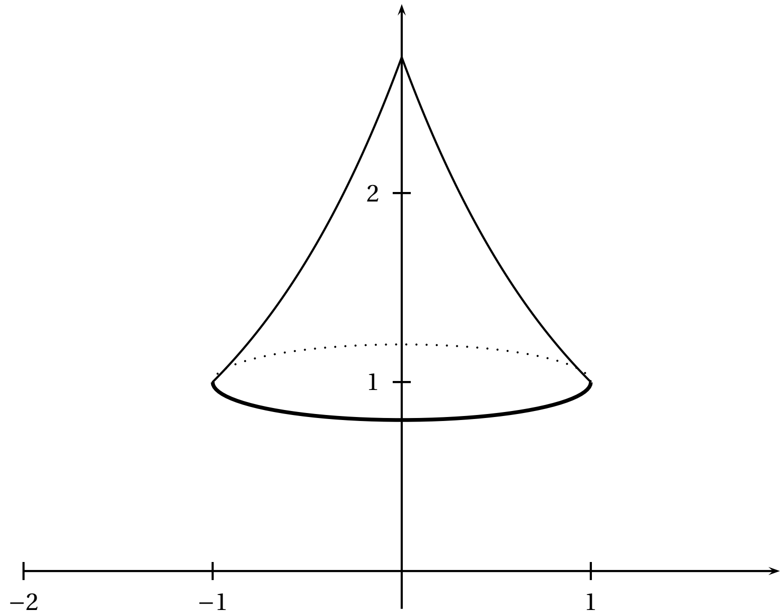
Exercice 28 Calcul de volume



On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E})\qquad:\quad y'+y=0\quad\text{et telle que}\quad f(0)=\mathrm{e}.$$

1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.
2. Soit t un réel donné de l'intervalle $[1 ; \mathrm{e}]$.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{1-x} = t$ d'inconnue x.
3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.
   On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\widehat{\mathrm{AB}}$ comme représenté ci-dessous. On note V son volume.
   On admet que $\mathrm{V} = \pi \int_1^{\mathrm{e}} (1 - \ln t)^2 \,\mathrm{d}t$.
   Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



Exercice 29 Volume bis

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x+2}.$$

Les deux parties peuvent être abordées indépendamment.
Partie A

1. Dresser le tableau des variations de f sur $[0 ; +\infty[$ et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe représentative.
2. a) Tracer sur la calculatrice graphique les courbes de la fonction f et de la fonction logarithme népérien ; on notera $\mathscr{L}$ cette dernière. Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = \ln(x)$$

   sur $[1 ; +\infty[$.

   b) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = \ln(x) - f(x)$$

   est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.
   En déduire que l'équation $f(x) = \ln(x)$ admet une unique solution α sur $[1 ; +\infty[$.

   c) Déterminer à 10^{-3} près une valeur approchée de α.

Partie B

1. À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer :

$$\mathrm{I} = \int_0^3 x^2 \mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x.$$

2. On définit le solide $\mathscr{S}$ obtenu par révolution autour l'axe (Ox) de la courbe d'équation $y = f(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 3$ dans le plan $(x\mathrm{O}y)$ (repère orthonormal d'unité 4 cm). On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ du solide est donné par :

$$\mathscr{V} = \int_0^3 \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

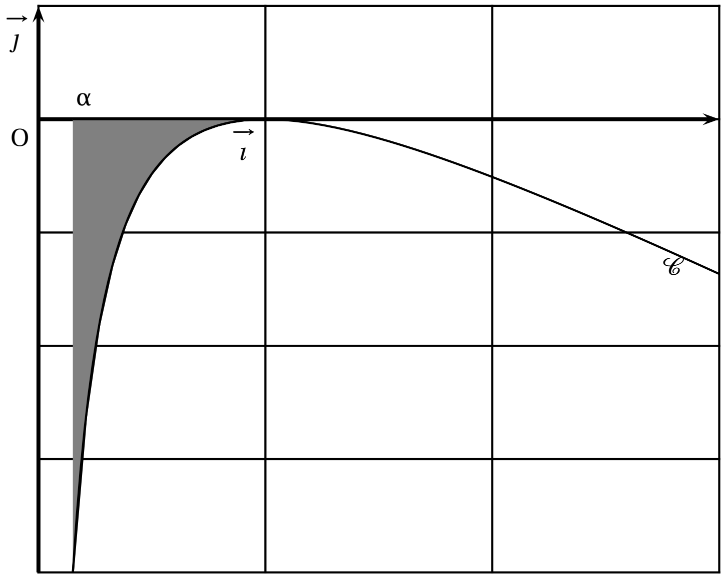
a) Exprimer $\mathscr{V}$ en fonction de I.

b) Déterminer alors une valeur approchée à 1 cm^3 près du volume du solide.

Exercice 30 Calcul d'aire

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x.$$



1. a) Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f'(x)$ est du signe de

$$\mathrm{N}(x) = -\left[2\left(x\sqrt{x}-1\right)+\ln x.\right]$$

b) Calculer N(1) et déterminer le signe de N(x) en distinguant les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$.

c) En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et les coordonnées du point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée maximale.

2. On note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de $]0\,;1[$.

a) Exprimer $\mathscr{A}(\alpha)$ en fonction de α (on pourra utiliser une intégration par parties).

b) Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation graphique de cette limite.

3. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de $[1\,;2]$ et :

$$\text{pour tout entier naturel} \quad n,\ u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1.$$

a) Démontrer, pour tout réel x élément de $[1\,;2]$, la double inégalité $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leqslant 1$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[1\,;2]$.

4. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

b) Déterminer la valeur exacte de ℓ.

Exercice 31 Calcul de e comme limite d'une somme

Partie I

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_n) \qquad y' + y = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :

$$g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

a) Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel,

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

b) En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$.
Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :

$$(\mathrm{F}) \qquad y' + y = 0.$$

b) Résoudre (F).

c) Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).

d) Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

Le but de cette partie est de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} \quad \text{(on rappelle que par convention} \quad 0! = 1).$$

1. On pose, pour tout x réel,

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x},\ f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

a) Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

b) Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
En utilisant la **Partie I**, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geqslant 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x. \quad \text{(on ne cherchera pas à calculer } \mathrm{I}_n)$$

a) Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle $[0\,;1]$, l'encadrement :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}.$$

En déduire que $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

b) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $\mathrm{I}_k - \mathrm{I}_{k-1} = -\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$.

c) Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que :

$$\mathrm{I}_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$$

d) En déduire finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

Exercice 32 développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Soit $a \in [0\,;\,+\infty[$.
On note $\mathrm{I}_0(a) = \int_0^a \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\mathrm{d}t$.

1. Calculez $\mathrm{I}_0(a)$ en fonction de a.

2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimez $\mathrm{I}_1(a)$ en fonction de a

3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que

$$\mathrm{I}_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + \mathrm{I}_k(a) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{P}(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.
Démontrez en calculant $\mathrm{I}_2(a)$, $\mathrm{I}_3(a)$ et $\mathrm{I}_4(a)$, que $\mathrm{I}_5(a) = \ln(1+a) - \mathrm{P}(a)$.

5. Soit $\mathrm{J}(a) = \int_0^a (t-a)^5\,\mathrm{d}t$. Calculez $\mathrm{J}(a)$.

6. a) Démontrez que pour tout $t \in [0\,;\,a]$, $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geqslant (t-a)^5$.

b) Démontrez que pour tout $a \in [0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{J}(a) \leqslant \mathrm{I}_5(a) \leqslant 0$.

7. En déduire que pour tout $a \in [0\,;\,+\infty[$, $|\ln(1+a) - \mathrm{P}(a)| \leqslant \frac{a^6}{6}$.

8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $\mathrm{P}(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Exercice 33 Intégrales et probabilités

1. Le but de cette question est de déterminer la probabilité que la somme de deux nombres choisis au hasard dans l'intervalle $[0,1]$ ne dépasse pas 1 et que le produit fasse au plus $2/9$.

a) Dans un repère orthonormé d'unité 10cm, construisez la droite (D) d'équation $y = -x+1$ et la courbe (C) d'équation $y = \frac{2}{9x}$.

b) Hachurez la partie du plan $\mathscr{E} = \{x \in [0,1],\ y \in [0,1] \mid x+y \leqslant 1 \text{ et } xy \leqslant 2/9\}$.

c) Déterminez les coordonnées des points d'intersection de (D) et (C).

d) Montrez que l'aire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{E}$ vaut $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\ln 2$ *u.a.*

e) En remarquant que la probabilité p cherchée vaut $\frac{\mathscr{A}}{\text{aire du carré unité}}$, calculez p. Cette probabilité dépend-elle de l'unité choisie ?

2. Jouons : on choisit au hasard et successivement trois couples de nombres compris entre 0 et 1. On gagne lorsque deux au moins des couples satisfont la condition de la question 1).

Calculez la probabilité π de gagner une partie en fonction de p.

3. Deux personnes A et B jouent à ce jeu.

Si A gagne une partie et B perd, A est déclaré vainqueur.

Si A perd une partie et B gagne, B est déclaré vainqueur.

Dans les autres cas, ils recommencent à jouer.

On note

A_n l'événement : « A est déclaré vainqueur après la $n^{\text{ème}}$ partie ».

B_n l'événement : « B est déclaré vainqueur après la $n^{\text{ème}}$ partie ».

C_n l'événement : « le jeu continue après la $n^{\text{ème}}$ partie ».

a) Calculez $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.

b) Exprimez $p(C_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$.

c) Déduisez-en que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et exprimez $p(C_n)$ en fonction de n et $p(C_1)$.
Donnez une valeur approchée à 10^{-1} près de p puis de π. Calculez alors $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n$.

d) Exprimez $p(A_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et déduisez-en $p(A_n)$ en fonction de n.