Devoir Surveillé n°1 — Jeudi 4 octobre 2007

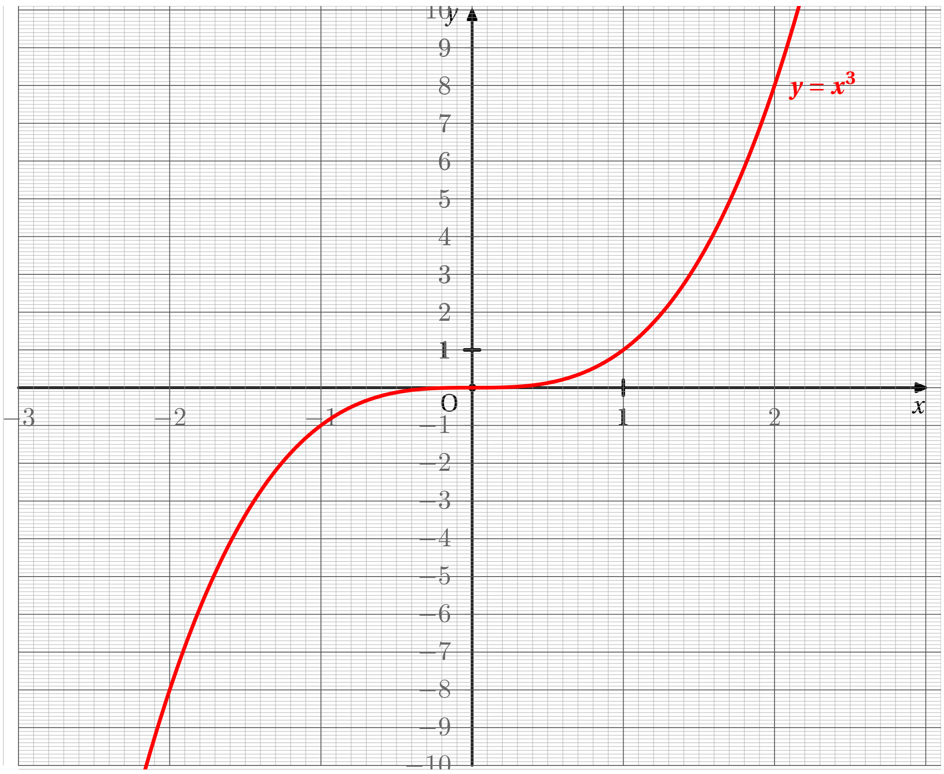
T^ale^S 5 — 2 heures

Exercice 1 Résolution d'une équation

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation (E) :

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

1. En utilisant la courbe d'équation $y = x^3$, indiquez comment on peut conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) en traçant une droite judicieusement choisie. Localisez ces solutions sur le graphique ci-dessous.



2. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$

a) Étudiez le sens de variations de f et dressez son tableau de variation.

b) Montrez que l'équation (E) admet exactement trois solutions sur $\mathbb{R}$ que l'on notera α_1, α_2 et α_3 telles que $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$.

c) À l'aide d'une calculatrice, proposer des valeurs approchées à 10^{-3} près de α_1, α_2 et α_3.

Exercice 2 Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + |x|}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2cm.

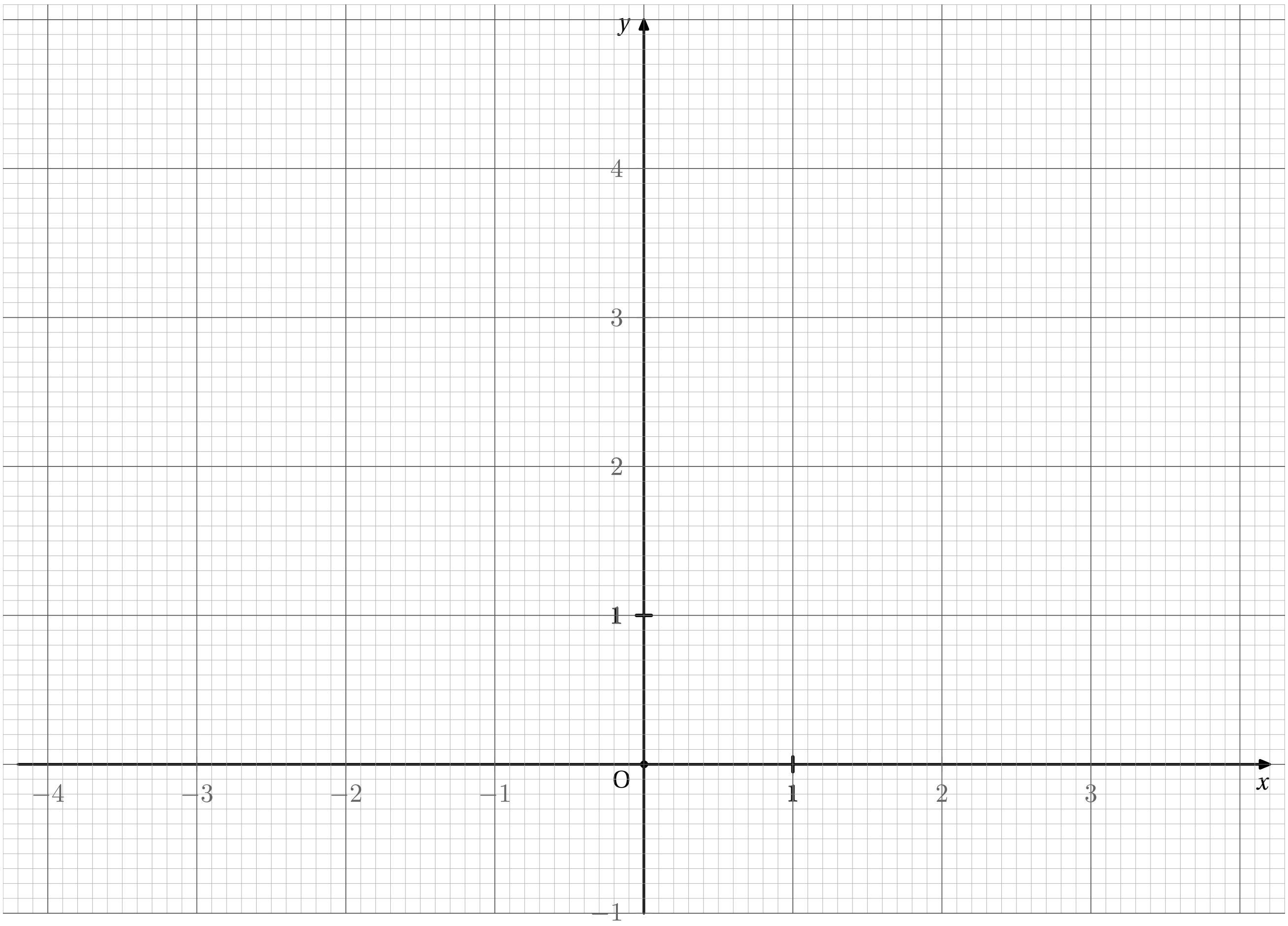
Partie A : étude de f

1. Montrez que la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe $\left(O; \vec{\jmath}\right)$. Qu'en déduisez-vous ?
2. Déterminez la limite de f en $+\infty$.
3. Étudiez la dérivabilité de f en zéro. Interprétez graphiquement ce résultat.
4. Étudiez le sens de variation de f.
5. Dressez le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B : asymptotes à $\mathscr{C}_f$

Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$.

1. a) Montrez que $\mathscr{C}_f$ admet $\mathscr{D}$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.
   b) Précisez les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$.
2. Prouvez que CR_f admet une autre asymptote dont vous donnerez une équation.
3. Tracez $\mathscr{C}_f$, ses asymptotes et les tangentes importantes sur la feuille jointe.



Exercice 3 Un peu de trigo

Sachant que $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$, exprimez $\cos(3t)$ uniquement à l'aide de $\cos(t)$.

Exercice 4 Question subsidiaire

Commentez cette citation du mathématicien syldave Otto VON MEINUNTERSTRUMPFÜHRERISTDASLICHTMEINERNACHTEN :

« *Le monde se sépare en 10 catégories : ceux qui comprennent cette phrase et les autres.* »