TROISIÈME LEÇON

FONCTIONS CONTINUES

Résumé Notre héros s'est familiarisé avec les notions de limite, de problème local ou global. Ces notions vont être amplement réinvesties lors de ce nouvel épisode, encore semé d'embuches...

I Qu'est-ce qu'une fonction continue en un point ?

Mathémator : Cette fois-ci, je vous donne la définition directement.

> **Définition 1 :**
> Soit a un réel, et soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a. On dit que **f est continue en a** lorsque $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a.

Vous savez que x^2 tend vers 9 quand x tend vers 3. Eh bien, cela signifie que la fonction carrée est continue en 3.

Téhessin : D'après votre définition, il faut que f soit définie en a pour pouvoir parler de la continuité de f en a.

Mathémator : Oui, sinon $f(a)$ n'aurait pas de sens ! En revanche, on peut parler parfois de limite de f en a même lorsque f n'est pas définie en a. Par exemple $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$: la fonction inverse n'est pas définie en 0 mais admet une limite en 0.

Téhessin : Vous m'avez donné la définition mathématique, mais vous ne m'avez pas expliqué ce qu'elle signifie. En fait, je ne vois pas trop où se trouve le problème.

Mathémator : Je suis d'accord avec vous. Cette définition fait double emploi avec la définition de la limite. En réalité, la notion de continuité d'une fonction en un point a n'est introduite que pour permettre de définir la notion de fonction continue sur tout un intervalle. Nous verrons que, par définition, une fonction définie sur un intervalle I est continue sur I lorsqu'elle est continue en chaque point de I. Dans ce cas, le mot continu est bien choisi car les fonctions continues sur un intervalle sont précisément celles dont le graphe se trace à l'aide d'un trait continu.

Téhessin : Mais pourquoi m'avez-vous quand même donné la définition de la continuité en un point ?

Mathémator : Parce qu'il existe des cas où une fonction est continue « presque partout » et qu'il faut y regarder de plus près, des fois qu'on pourrait arranger les choses.

a. Peut-on soigner des fonctions discontinues en un point ?

Téhessin : Je me souviens avoir vu en Première que la fonction $x \mapsto 1/x$ n'a pas de limite en 0, mais que par contre on a

$$\lim_{x\to 0^+} 1/x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} 1/x = -\infty$$

Mathémator : Très bien, mais je préfèrerais que vous notiez

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

et d'ailleurs, qu'est-ce que cela signifie précisément ?

Téhessin : Dire que x tend vers 0^+ signifie que x tend vers 0 en restant strictement positif.

Mathémator : C'est bien l'idée qui est derrière, même si elle reste un peu vague. (Mal)heureusement, la définition rigoureuse est hors programme.
Cette notion a un intérêt lorsque la fonction f présente une discontinuité en a mais a un comportement « régulier à droite de a ». C'était le cas par exemple de la fonction :

$$f_2 : [0,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in [0,1] \\ \cos(x-1) & \text{si } x \in]1,2] \end{cases}$$

Cette fonction n'a pas de limite en 1. Mais elle a une limite à droite en 1 égale à 1 et une limite à gauche égale à cos 1.

Téhessin : Mais Maître, quand on écrit $\lim_{x\to 1}(x-1)^2 = 0^+$, ça n'a pas le même sens, n'est-ce pas ?

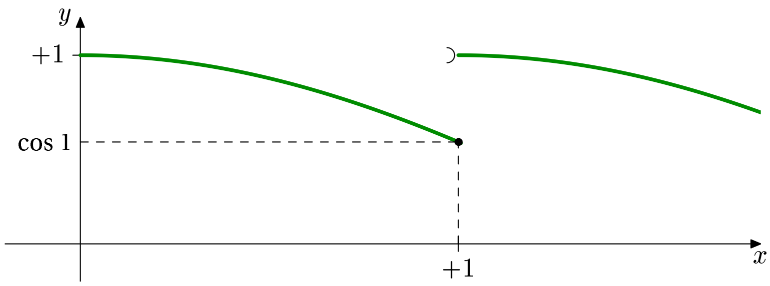
Mathémator : Non, effectivement, mais cette écriture n'est pas très correcte, car la limite de $(x-1)^2$ quand x tend vers 1, est le réel 0 et rien d'autre. Si on écrit 0^+, c'est pour se souvenir que les valeurs de $(x-1)^2$ pour des x proches de 1 sont positives. Une telle écriture permet parfois de simplifier le calcul de certaines limites : par exemple,

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2 = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

b. Y a-t-il différents types de discontinuité ?

Mathémator : Oui ! Une fonction f est continue en a si et seulement si elle a une limite à gauche et une limite à droite en a et que ces deux limites sont égales à $f(a)$. Elle peut donc être discontinue en a pour plusieurs raisons.

- Première raison possible : f admet une limite à gauche et à droite en a, mais ces deux limites ne sont pas égales. C'est le cas de la fonction f_2 de la question précédente.



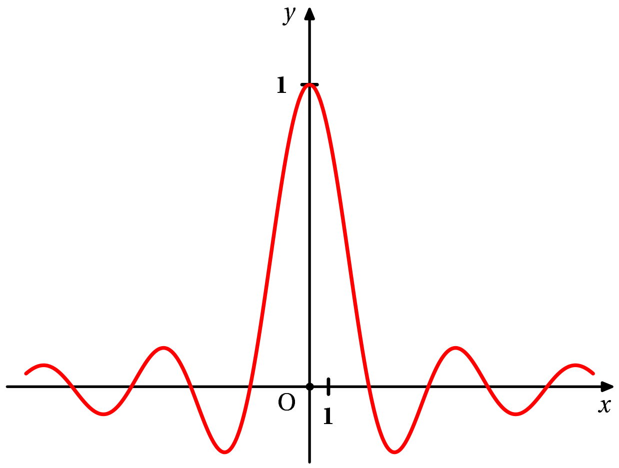
- Deuxième raison possible : f admet une limite commune à gauche et à droite en a, mais f n'est pas définie en a ou admet une autre valeur que la limite commune. C'est le cas par exemple de la fonction sinus amorti, très importante en physique

$$f_4 : x \mapsto \frac{\sin x}{x} \text{ pour tout } x \neq 0$$

Nous avons montré en exercice que $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f_4(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f_4(x) = \lim_{x\to 0} = 1$.

Il suffit donc maintenant de créer la *nouvelle fonction* g suivante

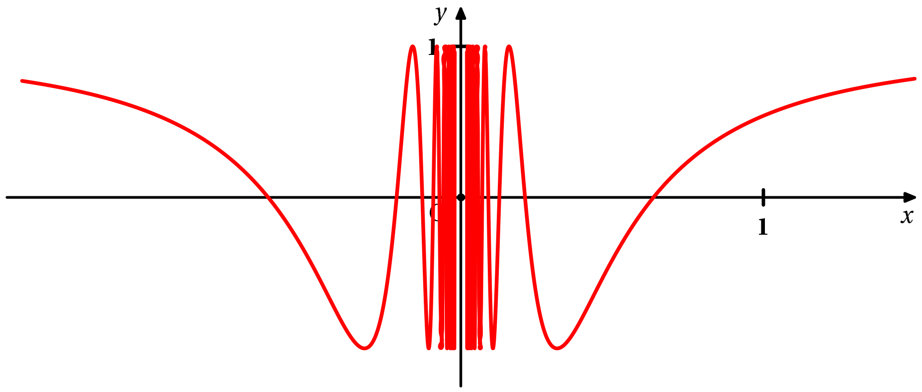
$$g : x \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \text{ pour tout } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$



On dit alors qu'on a *prolongé f_4 par continuité en 0.*

➥ Troisième raison possible, et les choses deviennent compliquées : f n'a pas de limite à droite ou à gauche en a. Il faut bien avouer que dans la pratique, presque toutes les fonctions ont une limite à gauche et à droite. Mais il faut avoir vu ces contre-exemples une fois dans sa vie, pour bien comprendre la théorie, comme celui de la fonction f_5 définie par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^* \quad f_5(x) = \cos(1/x)\,,\ \text{et } f_5(0) = 0$$



Elle n'a pas de limite à droite ni à gauche en 0. Quand x tend vers 0, $f_5(x)$ oscille continûment entre -1 et 1, de plus en plus vite à mesure que x se rapproche de 0.

Pour montrer que f_5 n'a pas de limite à droite en 0, nous aurons besoin d'avoir étudié les suites : il faudra donc patienter un peu.

Téhessin (à part) : *Ouf!...*

II Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

a. Intervalle

Mathémator : Tout d'abord, qu'est-ce qu'un intervalle ?

Téhessin : Ben c'est quelque chose du style $[a,b]$, ou $]a,b]$ ou $[a,b[$, ou $]a,b[$, ou $]-\infty,b]$ ou etc.

Mathémator : C'est un peu vague. Malheureusement une définition rigoureuse n'est pas envisageable en Terminale. Posons-nous au moins une question : est-ce que $\mathbb{R}^*$ est un intervalle ?

Téhessin : Je pense que non : il n'entre dans aucune des catégories car il a un « trou ».

Mathémator : C'est bien vu. Nous devrons nous contenter de cette absence de « trou » pour caractériser les intervalles.

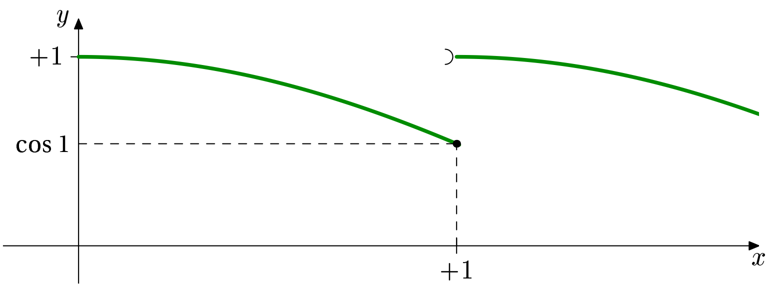
b. Quelles sont les fonctions dont le graphe est un trait continu ?

Mathémator : On peut déjà remarquer que c'est le cas de la plupart des fonctions que vous connaissez Téhessin. En effet, on peut considérer que les graphes des fonctions polynômiales, rationnelles, racine carrée, sinus,... sont des « traits continus », c'est-à-dire qu'on n'a pas à « lever le crayon » pour les tracer.

Mais attention, ce n'est pas toujours le cas. Nous avons déjà étudié la fonction

$$g : [0,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in [0,1] \\ \cos(x-1) & \text{si } x \in]1,2] \end{cases}$$

et son graphe n'est pas un « trait continu ».



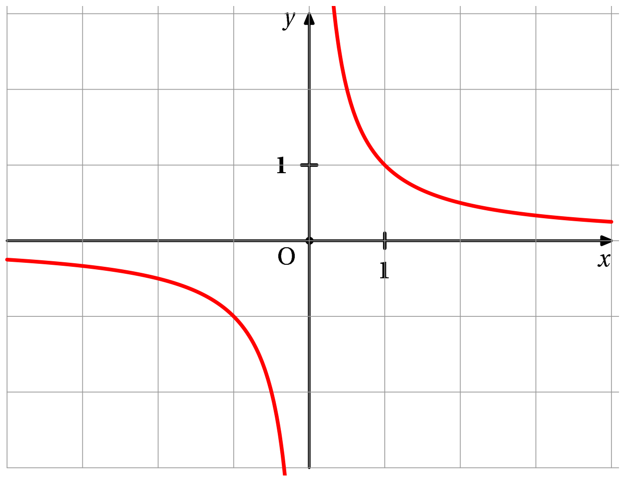
Téhessin : Mais cette notion de « trait continu » a-t-elle un sens mathématique ?

Mathémator : Pour le moment, cette notion de « trait continu » est juste une notion intuitive que tout le monde comprend. Et ce que je vous propose de faire maintenant, c'est de chercher quelle propriété une fonction doit vérifier pour que son graphe soit un « trait continu ».

La première condition est que la fonction soit définie sur un intervalle. Vous voyez bien par exemple que le graphe de la fonction

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

n'est pas un « trait continu » et la raison en est que $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.



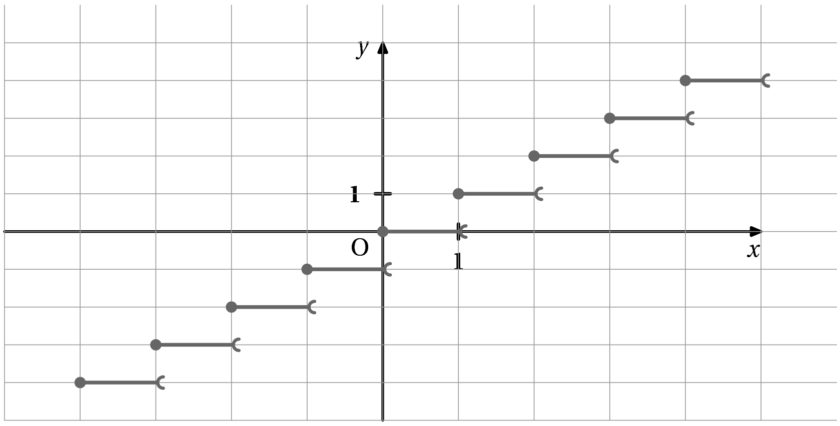
On se limite donc à une fonction définie sur un intervalle. Pouvez-vous me dire, Téhessin, à quelle condition son graphe est un « trait continu » ?

Téhessin : J'ai peut-être une idée. La fonction g précédente est bien définie sur un intervalle mais elle a un graphe « en deux morceaux » parce que $g(x)$ est défini par deux formules différentes suivant les valeurs de x. Mais s'il n'y a qu'une seule formule, comme pour les fonctions polynomiales, cosinus ..., alors le graphe sera un trait continu.

Mathémator : Non Téhessin. La fonction partie entière

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{E}(x)$$

est définie par « une seule formule », comme vous dites, mais il faut lever le crayon pour tracer son graphe.



Vous sentez bien que la notion de « fonction définie par une seule formule » est trop vague. Il faudrait préciser son sens, et ce n'est pas facile. Revenons plutôt à la fonction g : à votre avis, pour quelle raison son graphe n'est-il pas un trait continu ?

Téhessin : Peut-être parce que les limites de g à gauche et à droite en 1 sont différentes.

Mathémator : C'est ça, et comme ces deux limites sont différentes, g n'a pas de limite en 1. Plus généralement, si l'on considère une fonction f définie sur un intervalle I, le graphe Γ_f ne peut être un « trait continu » que si f admet une limite en tout point a de I. Et d'ailleurs, comme f est définie en a, cette limite est nécessairement égale à $f(a)$. On constate que c'est cette condition sur f qui rend compte du fait que Γ_f est un « trait continu ». Mais plutôt que de dire *le graphe de f est un trait continu*, on dira *la fonction f est continue*.

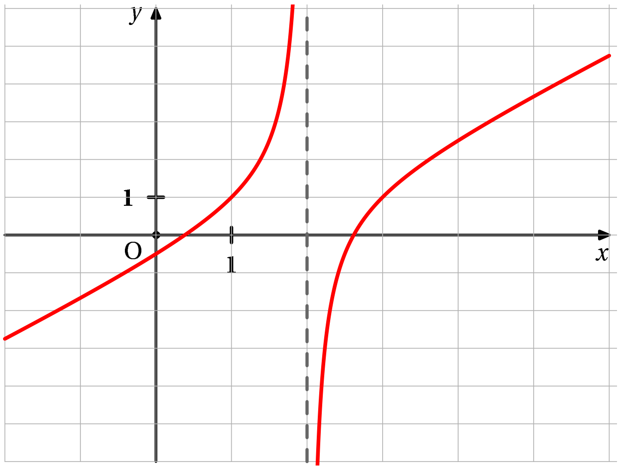
Définition 2 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$. On dit que f est continue lorsque, pour tout $a \in \mathrm{I}$, on a $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, ce qui revient à dire que f est continue en tout point de I.

Téhessin : Mais il est impossible de vérifier pour chaque point que la fonction y est continue !

Mathémator : Certes ! Nous pouvons malgré tout aisément vérifier que les fonctions polynômes, sinus, cosinus, valeur absolue, racine carrée sont continues.
Dans la pratique nous utiliserons les théorèmes opératoires. Nous pouvons ainsi montrer, grâce aux théorèmes opératoires sur les limites que les sommes, produits, quotients et composées des fonctions de référence sont continues **là où elles sont définies**.

Par exemple, nous écrirons que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$ est continue sur $]-\infty,2[$ ET sur $]2,+\infty[$ comme quotient de fonctions polynomiales continues.

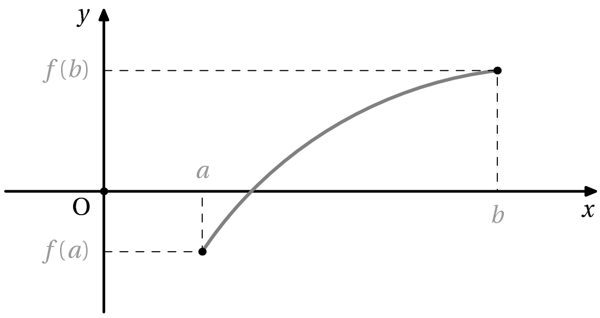


Téhessin : Donc si j'ai bien compris, il faut interpréter la continuité d'une fonction définie sur un intervalle en disant que son graphe est un « trait continu ».

Mathémator : C'est ça.

c. Application fondamentale : une fonction continue peut-elle changer de signe sans s'annuler ?

Téhessin : Je pense que non ! Car pour relier par un « trait continu » un point situé en dessous de l'axe Ox à un point situé au dessus, il faudra couper cet axe.



Mathémator : Très bien ! L'interprétation intuitive de la continuité de f vous a permis de deviner le résultat. Mais il faut maintenant le démontrer rigoureusement en revenant à la définition de la continuité. Autrement dit, étant donnée une fonction f continue, définie sur un intervalle contenant a et b avec $a < b$ et telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés, comment montrer l'existence d'un zéro de f sur $]a, b[$, c'est-à-dire d'un élément c de $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$?

Cette démonstration étant délicate mais constituant une trés intéressante application du théorème des suites adjacentes, nous nous en occuperons en TD un peu plus tard cette année.

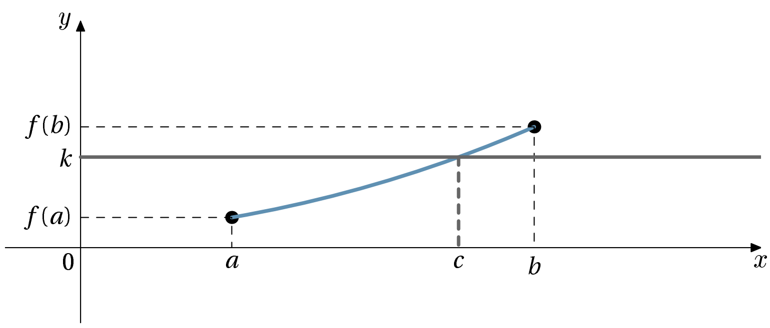
d. Une fonction f continue sur $[a, b]$ prend-elle toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$?

Téhessin : Est-ce que ce n'est pas quasiment le même problème que celui de la question précédente ?

Mathémator : Effectivement. Alors voilà le résultat.

Théorème 1 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, et soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.



La preuve est très simple. Si $f(a)$ ou $f(b)$ est égal à k, on prend $c = a$ ou $c = b$. Et sinon, on applique le résultat de la question précédente à la fonction auxiliaire

$$g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - k$$

On peut le faire car g est continue et car $g(a)$ et $g(b)$ sont non nuls et de signes opposés puisque λ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

e. Comment montrer que deux courbes se rencontrent ?

Téhessin : Mais c'est encore le même genre de problème, à condition de supposer que les deux courbes sont des « traits continus ».

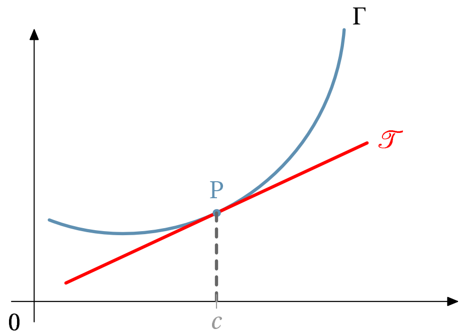
Mathémator : Ce que nous supposerons. Et vous avez raison, on pourra *souvent* se ramener au théorème des valeurs intermédiaires.
Montrer que les graphes des fonctions continues f et g se rencontrent revient à montrer qu'il existe c tel que $f(c) = g(c)$. On introduit alors la *fonction auxiliaire* $f - g$, et pour montrer qu'elle s'annule, il suffit d'après le théorème des valeurs intermédiaires de trouver a et b tels que $f(a) \leqslant g(a)$ et $f(b) \geqslant g(b)$.

On peut par exemple utiliser cette technique pour montrer qu'une fonction f continue définie sur $[0,1]$ et à valeurs dans ce même intervalle $[0,1]$ admet un point fixe, car cela revient à montrer que son graphe rencontre la première bissectrice.

Nous traiterons ces exemples en exercices.

Téhessin : Vous aviez l'air de dire tout à l'heure que le théorème des valeurs intermédiaires ne permettait pas toujours de montrer que deux courbes se rencontrent.

Mathémator : Oui, dans le cas où les deux courbes se rencontrent « sans se croiser ». Par exemple, cela peut se produire avec le graphe d'une fonction ayant certaines propriétés et l'une de ses tangentes.



On peut avoir $f(c) = g(c)$ sans qu'il existe a et b distincts tels que $f(a) \leqslant g(a)$ et $f(b) \geqslant g(b)$.

f. Comment montrer qu'une équation admet une unique solution ?

Mathémator : Le TVI s'avère fort utile comme vous venez de le découvrir, pour montrer qu'une équation admet *au moins* une solution. Il a pourtant un défaut [a].

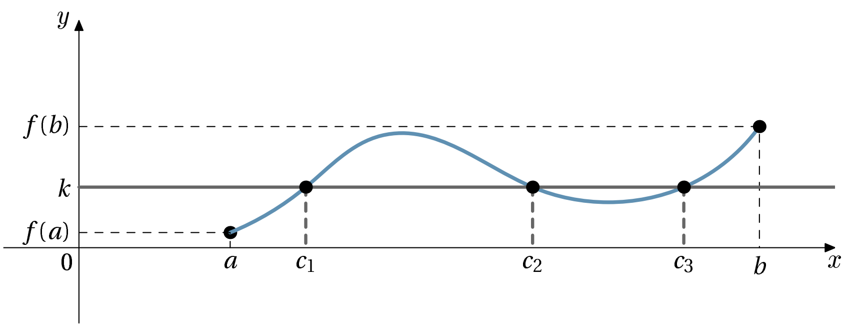
Téhessin : On sait que l'équation admet *au moins* une solution, mais on ne sait pas *combien* de solutions cela représente [b].

Mathémator : Vous avez mis le sabre laser sur la faiblesse du TVI. En fait, il suffit de rajouter une petite hypothèse au TVI pour le voir se transformer en TSU.

Téhessin : TSU, TSU, mmmm.... J'y suis ! Théorème de LA solution unique [c].

Mathémator : Oui ! Alors, comment être sûr de l'unicité de la solution ?

Téhessin : Je suppose qu'un petit dessin devrait m'aider.



En fait, si la courbe joue aux montagnes russes, certains réels de l'intervalle $[f(a), f(b)]$ auront plusieurs antécédents, ce qui ne sera plus vrai si f est strictement monotone.

Théorème 2 : Théorème de la solution unique (Théorème de la bijection)

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, et soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Alors pour tout réel k **compris entre** $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **unique** réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Mathémator : Nous pouvons à présent énoncer le théorème de LA solution unique [d]

La démonstration en est simple : l'hypothèse rajoutée nous indique dans quelle direction chercher. Je vous laisse donc la rédiger...

Téhessin : ...à titre d'exercice, je sais.

g. Comment résoudre une équation numérique par dichotomie ?

Mathémator : Fort de ces nouveaux pouvoirs mathématiques, montrer que l'équation

$$x^4 + x = 1$$

admet une unique solution x_0 sur $[0,1]$ ne va vous poser aucun problème.

Téhessin : Il doit suffire d'étudier la fonction

$$f\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^4 + x$$

D'après les théorèmes généraux elle est continue sur $[0,1]$. On vérifie aisément qu'elle est srictement croissante sur cet intervalle. Enfin $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$. Je dégaine alors le TSU pour conclure.

Mathémator : Vous assimilez vite. Comment feriez-vous, Téhessin, pour déterminer une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près avec votre calculatrice ?

Téhessin : Rien de plus simple : je tape

```
solve(x^4+x=1,x)
```

et la calculatrice me répond

```
-1.220744085,  0.7244919590
```

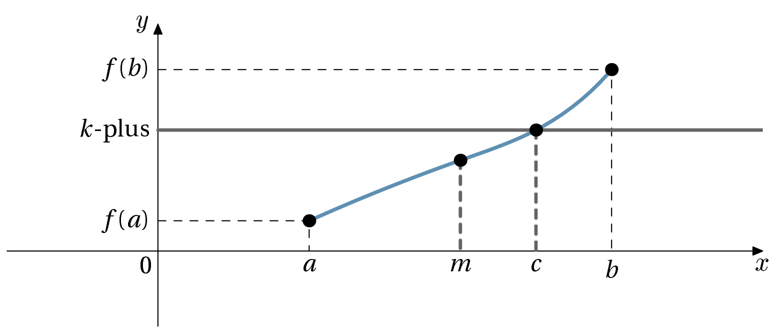
Or, comme $x_0 \in [0,1]$, je ne garde que le deuxième solution.

Mathémator : , *à part* : Il m'a roulé...*(à voix haute)* Certes, certes...euh...mais imaginons que votre calculatrice n'ait pas de touche `solve`.

Téhessin : J'essaie différentes valeurs. Si je tombe sur une image supérieure à 1, je prend un x plus petit, et vice versa.

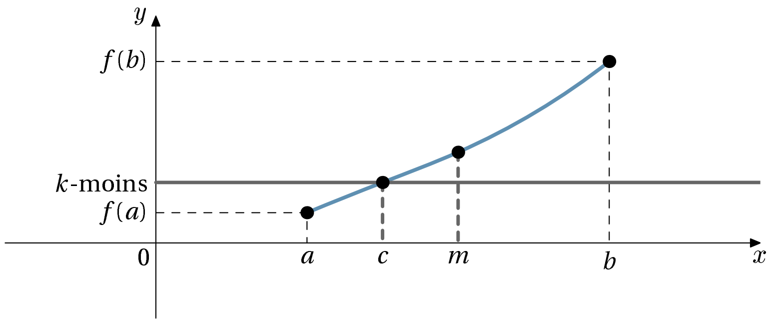
Mathémator : En fait, on peut systématiser la recherche des différentes valeurs de x pour minimiser le nombre de calculs. Considérons une fonction $g\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ strictement croissante, continue et telle que $g(a) < k$ et $g(b) > k$. Alors l'équation $g(x) = k$ admet une unique solution c dans $]a,b[$ d'après le TSU. Pour obtenir une valeur approchée de c, on va « dichotomer » le segment $[a,b]$, c'est à dire qu'on va le couper en deux, par exemple par le milieu $m = (a+b)/2$. Le monde alors se sépare en deux catégories :

➥ si $g(m) < k$, alors $c \in]m,b[$



a. Contrairement à vous, chanceux lecteur, Téhessin ne peut distinguer à l'oreille les caractères en italique
b. Vous devez admettre que Téhessin assure un max
c. Faut quand même pas pousser : c'est plus un élève, c'est un héros de film américain
d. Pour le bac, un tableau de variation complété suivi d'une phrase du style « par lecture du tableau de variation » suffira

➥ si $g(m) \geqslant k$, alors $c \in]a, m]$



En répétant ce procédé, on pourra construire une suite de segments « emboîtés » contenant c, centrés en m_n et de longueurs aussi petites que l'on veut. Vous pourrez peut-être démontrer l'année prochaine que la suite (m_n) converge vers c, et que les différentes valeurs de m_n sont autant de valeurs approchées de c.

Téhessin : Mais à quoi sert cette méthode puisque ma calculatrice possède la fonction `solve` ?

Mathémator : Justement, le (la) programmeur(se) de votre calculatrice a probablement utilisé une méthode pour écrire le programme associé à la touche `solve`, un peu plus compliquée que la dichotomie, mais un futur scientifique et informaticien comme vous doit donc connaître la méthode de dichotomie.

h. Avec XCAS

Pour mettre tout ceci en pratique, ouvrons XCAS

```
dicho(f,p,a,b):={
local aa,bb,k;
aa:=a;
bb:=b;
k:=0; // on cree un compteur d'iterations
 while( (bb-aa)>p) {
  if ( f(0.5*(bb+aa))*f(bb)>0 )
    then{ bb:=0.5*(aa+bb) }
    else{ aa:=0.5*(aa+bb) }
 k:=k+1; // on rajoute 1 au compteur
 }
return 0.5*(bb+aa)+" est la solution trouvee  apres " +k+ " iterations";
}:;
```

ce qui donne pour $\sqrt{2}$

```
Digits:=30:;
dicho(x->x^2-2,10^(-30),1,2)
```

Et on obtient :

```
1.414213562373095048801688724209 est la solution trouvée  après 100 itérations
```

III A mad tea party

« Reprenez donc un peu de thé » propose le Lièvre de Mars.
« Je n'ai rien pris du tout, je ne saurai donc reprendre de rien ! »
« Vous voulez dire que vous ne sauriez reprendre de quelque chose » repartit le Chapelier.
« Quand il n'y a rien, ce n'est pas facile d'en reprendre ».

- Alors comme ça, vous êtes étudiante ?
- Oui, en mathématiques par exemple.
- alors que vaut cette fraction : un sur deux sur trois sur quatre ?
- Eh bien ...
- Elle vaut deux tiers, la devança le Loir.
- Ou trois huitièmes si vous préférez, ajouta le Lièvre de Mars.
- Ou encore un sur vingt-quatre, affirma le Chapelier.
- En fait, je crois que...
- Aucune importance ! Dîtes-nous plutôt combien vous voulez de sucre dans votre thé ?
- Deux ou trois, ça dépend de la taille de la tasse.
- Certainement pas, car de toute façon, deux ou trois c'est pareil.
- Parfaitement ! approuva le Loir en fixant Alice qui écarquillait les yeux.
- Ce n'est pourtant pas ce qu'on m'a appris, fit celle-ci.
- Pourtant, ce n'est pas compliqué à comprendre, en voici une démonstration des plus élémentaires
  On sait que pour tout entier n on a successivement

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$(n+1)^2 - 2n - 1 = n^2$$

Retranchons $n(2n+1)$ des deux côtés

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$$

Mézalor, en ajoutant $(2n+1)^2/4$, on obtient

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4} = n^2 - n(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4}$$

Soit

$$\left((n+1) - \frac{2n+1}{2}\right)^2 = \left(n - \frac{2n+1}{2}\right)^2$$

En passant à la racine carrée, on obtient

$$(n+1) - \frac{2n+1}{2} = n - \frac{2n+1}{2}$$

d'où

$$n+1 = n$$

Et si je prends $n = 2$, j'ai aussitôt $3 = 2$

– Alors, qu'est-ce que vous en dites ?
– Je...commença Alice.
– D'ailleurs, cela prouve que tous les entiers sont égaux, la coupa le Lièvre de Mars.
– Pas mal du tout ! Qu'en dites-vous mademoiselle la mathématicienne ?
– Je vais vous dire tout de suite ce que j'en pense
– Ah non ! Nous préférerions de loin que vous pensiez ce que vous allez nous dire.
– C'est pareil ! grinça Alice qui commençait à en avoir assez.
– Comment ça, c'est pareil ? Dire ce que l'on pense ce serait pareil que penser ce que l'on dit ? S'étrangla le Lièvre de Mars.
– Incroyable ! Et manger ce qu'on voit ce serait pareil que voir ce qu'on mange ?
– Mais...
– Et respirer quand on dort pareil que dormir quand on respire ?
– En logique, nous vous mettons 3 sur 5.
– Autant dire moins que un.
– C'est à dire zéro, puisque si 2=3 alors 1=0.
– Parce que chez vous, 3 c'est moins que 1 ? s'indigna Alice.
– On se demande ce qu'on vous apprend à l'école ! Bien sûr que oui ! Tenez, considérez

$$f(x) = \frac{x^2+32}{2x^2+1} + \frac{|x|+1}{2x+51}$$

Eh bien il est facile de voir que cette fonction a pour limite 0 en moins l'infini et 1 en plus l'infini.
– Je ne dis pas le contraire, protesta Alice.
– Donc l'image par f de $\mathbb{R}$ est l'intervalle $]0,1[$, or $f(0)=3$, donc 3 appartient à $]0,1[$ à ce titre : on a bien 3 plus petit que 1.
– C'est de la folie pure, pensa Alice...

IV Exercices divers

Exercice 1 Cheshire cat's journey

Un chat du Cheshire parcourt 10 km en 2 heures. montrez qu'il existe un intervalle de temps de durée 1 heure pendant lequel il a parcouru exactement 5 km.

Introduisez la fonction qui à t associe le nombre de km parcourus en t heures puis la fonction $t \mapsto d(t+1)-d(t)$

Exercice 2 Racine d'un polynôme

Montrez que tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

Il faut considérer la fonction polynomiale associée et chercher un théorème dans le cours qui vous permette de conclure.

Exercice 3 Partie entière

Étudiez et représentez graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f\,:\,x \mapsto \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$

Exercice 4 Partie entière : le retour

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}\,:\,x \mapsto x-\mathrm{E}(x)$ On rappelle que $\mathrm{E}(x)$ est l'unique entier vérifiant $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1$.

Montrez que $\mathrm{E}(x+1)=\mathrm{E}(x)+1$ puis que F est périodique. et représentez *sommairement* F sur un graphique.

Exercice 5 Point fixe

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$.
Montrez qu'il existe un réel $x_0 \in [0,1]$ vérifiant $f(x_0)=x_0$. Illustrez votre propos à l'aide d'un schéma.

Exercice 6 Partie entière will never die

Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudiez $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{E}(-3nx)}{-2n}$

Commencez par encadrer $\mathrm{E}(-3nx)$

Exercice 7 Somme de parties entières

Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudiez $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{E}(kx)$

Exercice 8 Résolutions analytiques d'équations

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos x + x$.
En déduire que l'équation $\cos x + x = 0$ a une unique solution. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

2. On considère l'équation (E) $\sin x - \dfrac{x}{2} = 0,\ x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que toutes les solutions de cette équation appartiennent à l'intervalle $[-2\,;\,2]$.

b) Donner, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation (E).

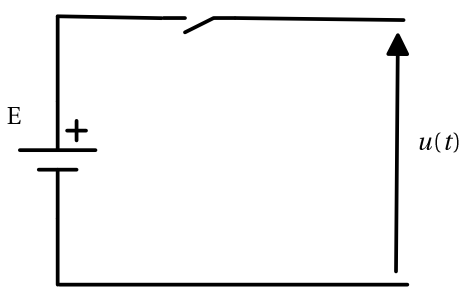
c) Donner une valeur approchée, à 10^{-3} près par défaut, de la plus grande solution.

Exercice 9 Échelon de Heaviside

1. Occupons-nous de fonctions utilisées couramment en électricité [e]

On considère le cicuit très simple ci-contre. On ferme l'interrupteur à l'instant $t=0$ et on mesure la tension $\mathrm{U}(t)$. Elle peut être définie par

$$t \mapsto \mathrm{U}(t) = \begin{cases} \mathrm{E} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



Représentez graphiquement la fonction U.

e. et aussi en infographie, en musique, etc.

2. On note f la fonction $f\ :\ t \mapsto \mathrm{U}(t-2)$ et $g\ :\ t \mapsto \mathrm{U}(t+2)$.
En électricité, on appelle l'une *échelon retardé* et l'autre *échelon avancé* : pourriez-vous dire qui est qui ?

Exercice 10 Fonction porte

Représentez la fonction $\Pi\ :\ x \mapsto \begin{cases} \mathrm{E} & \text{si } |x| \leqslant 1/2 \\ -\mathrm{E} & \text{si } |x| > 1/2 \end{cases}$
Donnez une interprétation physique de cette fonction si x représente la fréquence d'un signal émis par un émeteur radio.

Exercice 11 Signal carré

Pour s'amuser, on fait varier le sens du courant. Représentez la fonction φ qui est de période 1 et vérifie

$$t \mapsto \varphi(t) = \begin{cases} \mathrm{E} & \text{si } 0 < t < 1/2 \\ -\mathrm{E} & \text{si } 1/2 < t < 1 \end{cases}$$

Exercice 12 Signal triangulaire

1. Soit T la fonction **paire**, de période 1, et qui vérifie, pour tout $x \in [0\,;1/2[$

$$\mathrm{T}(x) = \mathrm{E} - 2\mathrm{E}x$$

Représentez graphiquement cette fonction et déterminez l'expression de cette fonction pour $x \in]-1/2\,;0]$

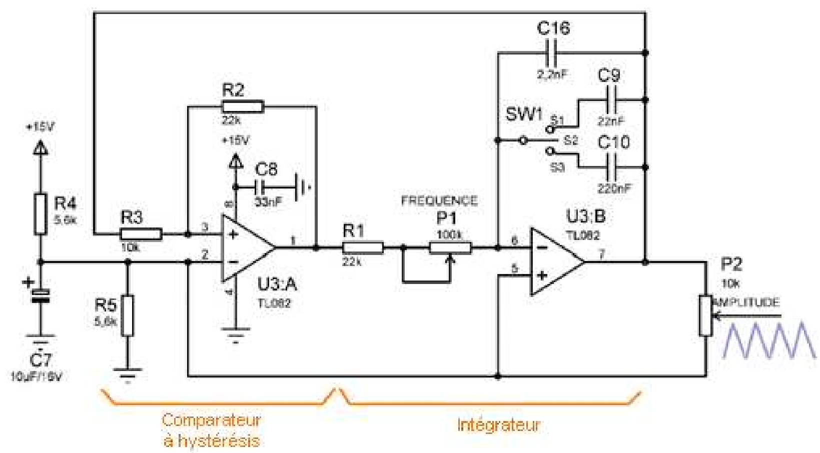
2. On considère la fonction Λ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Lambda\ :\ t \mapsto t\mathrm{U}(t) - 2(t-1)\mathrm{U}(t-1) + (t-2)\mathrm{U}(t-2)$$

où U est la fonction de Heavyside étudiée précédemment.
Représentez graphiquement cette fonction en distinguant les intervalles $]-\infty\,;0[$, $[0\,;1[$, $[1\,;2[$ et $[2\,;+\infty[$.

3. Donnez un nom à la fonction suivante d, de période 1, telle que $d(x) = \mathrm{E}x$ pour tout $x \in [0\,;1[$.

Rien de plus simple qu'un signal triangulaire... et pourtant, voici le circuit le produisant :



Exercice 13 Fonctions causales

Les fonctions causales sont très utilisées en électricité. Il s'agit tout simplement de fonctions nulles sur $]-\infty;0]$.
Pour les exprimez, on utilise la fonction de Heaviside qu'on multiplie par des fonctions usuelles. Représentez graphiquement les fonctions suivantes

1. $f_1 : x \mapsto \mathrm{U}(x)\sin x$

2. $f_2 : x \mapsto \mathrm{U}(x)\sin(x-\pi)$

3. $f_3 : x \mapsto \mathrm{U}(x-\pi)\sin x$

4. $f_4 : x \mapsto \mathrm{U}(x-\pi)\sin(x-\pi)$

Oliver Heaviside

Oliver Heaviside (18 mai 1850 - 3 février 1925) était un physicien britannique autodidacte.
Bien qu'il eût de bons résultats scolaires, il quitta l'école à l'age de seize ans et devint opérateur de télégraphe. Cependant il a continué à étudier et, en 1872, alors qu'il travaillait comme chef opérateur à Newcastle-upon-Tyne, il commença à publier ses résultats de recherche en électricité. Il a formulé à nouveau et simplifié les équations de Maxwell sous leur forme actuelle utilisée en calcul vectoriel.
Entre 1880 et 1887 il développa le calcul opérationnel, une méthode pour résoudre des équations différentielles en les transformant en des équations algébriques ordinaires ce qui lui valu beaucoup de controverse lorsqu'il l'introduisit pour la première fois, du fait d'un manque de rigueur dans l'utilisation de la dérivation.
En 1887, il suggéra que des bobines d'induction devraient être ajoutées au câble du téléphone transatlantique afin de corriger la distorsion dont il souffrait. Pour les raisons politiques, cela n'a pas été fait.
En 1902 il prédit l'existence de couches conductrices pour les ondes radio qui leur permettent de suivre la courbure de la terre ; ces couches, situées dans l'ionosphère, sont appelées couches de Kennelly-Heaviside, du nom de Arthur Kennelly, physicien américain qui eut la même intuition que lui. Elles ont finalement été détectées en 1925 par Edward Appleton.
Il a développé aussi la fonction de Heaviside (aussi appelée échelon ou marche), utilisée communément dans l'étude de systèmes en automatique et il a étudié la propagation des courants électriques dans les conducteurs.
Des années plus tard son comportement devint, comment dire...,très excentrique : bref, il perdit un peu la boule, comme souvent chez les physiciens.