Correction Bac S France juin 2010
assistée par XCAS et `professor`

Guillaume CONNAN
http://tehessin.tuxfamily.org

23 juin 2010

Exercice 1

Partie A

1. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$$u'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} - u(x)$$

On en déduit que, pour tout réel x, $u'(x) + u(x) = \mathrm{e}^{-x}$ donc que u est une solution de (E).

```
u(x):=exp(-x)
```

(x)→exp(-x)

```
simplifier(deriver(u(x),x)+u(x))==exp(-x)
```

0

2. (E′) admet pour ensemble de solutions :

$$\mathscr{S}' = \left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

```
desolve(y'+y=0,y)
```

c_0e^{-x}

3. On sait que la fonction u vérifie, pour tout réel x :

$$u'(x) + u(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

$$\begin{aligned}
v-u \text{ solution de (E')} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ v'(x) - u'(x) + v(x) - u(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x)\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ v'(x) + v(x) = \mathrm{e}^{-x}\\
&\Leftrightarrow v \text{ solution de (E)}
\end{aligned}$$

4. Comme v est une solution de (E) si, et seulement si, $v-u$ est une solution de (E′), alors, d'après la question 2.

$$\begin{aligned} v \text{ solution de (E)} &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ v(x)-u(x)=\lambda\mathrm{e}^{-x}\\ v \text{ solution de (E)} &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ v(x)=x\mathrm{e}^{-x}+\lambda\mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}=\left\{x\mathrm{e}^{-x}+\lambda\mathrm{e}^{-x},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

```
desolve(y'+y=exp(-x),y)
```

$c\_0e^{-x}+xe^{-x}$

Partie B

1. Étudions les variations de la fonction f_k qui est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f_k'(x)=\mathrm{e}^{-x}-(x+k)\mathrm{e}^{-x}=(1-k-x)\mathrm{e}^{-x}$$

Or $\mathrm{e}^{-x}>0$ pour tout réel x. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		$1-k$		$+\infty$
Signe de $f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f_k		$\nearrow$	e^{k-1}	$\searrow$	

ce qui traduit que f_k admet un maximum en $x=1-k$.

```
fk(x):=(x+k)*exp(-x)
```

(x)→(x+k)*exp(-x)

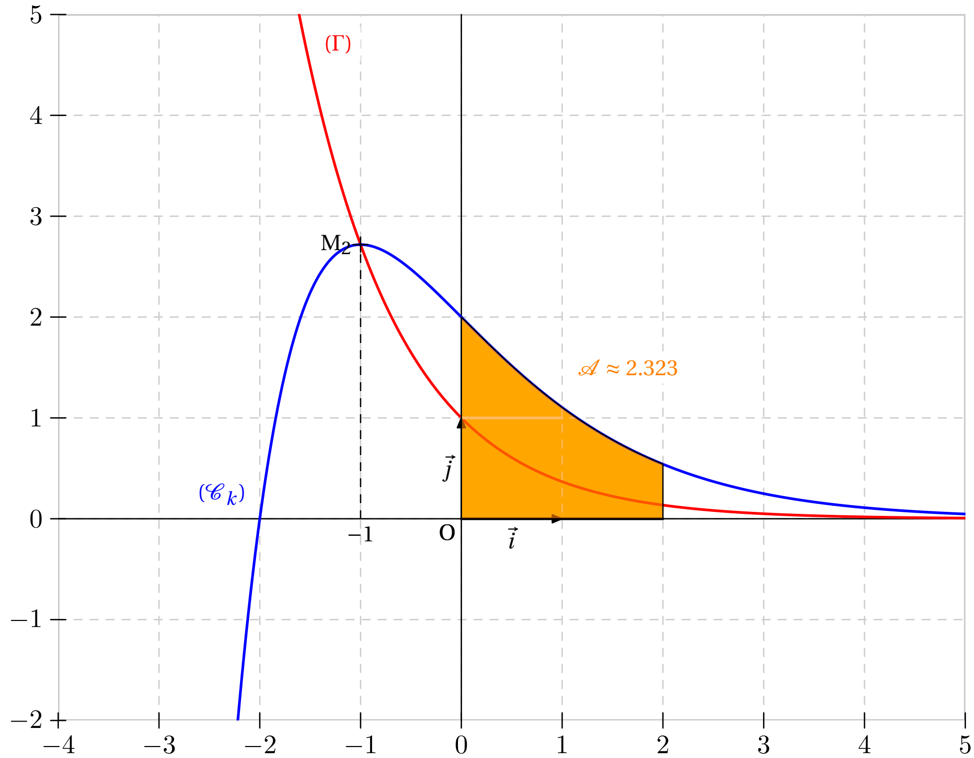
```
resoudre(deriver(fk(x),x)>=0,x)
```

$[x\leq(-k+1)]$

2. Comme $f_k(1-k)=\mathrm{e}^{-(1-k)}$, on en déduit que le point $\mathrm{M}_k\left(1-k, f_k(1-k)\right)$ appartient à Γ.
3. (a) La fonction $x\mapsto\mathrm{e}^{-x}$ étant strictement croissante sur bbr, il est facile de distinguer Γ de $\mathscr{C}_k$:
   (b) Comme $\mathrm{e}^0=1$, on en déduit que Γ coupe l'axe des ordonnées en 1 donc qu'une graduation correspond à une unité sur l'axe des ordonnées. Or Γ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2 donc :

$$f_k(0)=k=2$$

Enfin, les courbes Γ et $\mathscr{C}_2$ se coupent sur le graphique en un point d'abscisse -1 graduation. Or ce point est M_2 qui a pour abscisse $1-2=-1$. On en déduit qu'en abscisse aussi, une graduation vaut une unité.
On aurait pu également lire la question suivante et vérifier que 2 est une bonne valeur pour k...



4. Posons $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^2 (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et effectuons une intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x+2 & v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

On en déduit que :

$$\mathrm{I} = \left[-(x+2)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2 + \int_0^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -4\mathrm{e}^{-2} + 2 - \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2 = -4\mathrm{e}^{-2} + 2 - \mathrm{e}^{-2} + 1$$

Finalement, $\mathrm{I} = -5\mathrm{e}^{-2} + 3 \approx 2,323$u.a.

```
int((x+2)*exp(-x),x,0,2)
```

$$-5e^{-2} + 3$$

```
int((x+2)*exp(-x),x,0,2.0)
```

2.323324

Exercice 2

1. Les rôles des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant symétriques, on peut supposer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.
Alors, d'après la propriété 1, on a, pour tout entier naturel n :

$$v_0 \geqslant v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$$

On en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par le réel u_0 et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par le réel v_0. D'après la propriété 2, ces deux suites sont donc convergentes.

Appelons ℓ et ℓ' leurs limites respectives, alors la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 d'après la définition, admet pour limite $\ell - \ell' = 0$. On en conclut que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Tiens, le même exercice qu'il y a cinq ans...

2. (a) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{10^n} = 0$, les deux suites convergent vers 1.

   De plus, pour tout entier naturel n, $v_n - u_n = \frac{2}{10^n}$ donc $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   Enfin, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{9}{10^{n+1}} > 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $v_{n+1} - v_n = -\frac{9}{10^{n+1}} < 0$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   Les deux suites sont donc adjacentes.

   (b) Les deux suites divergent vers $+\infty$ donc ne peuvent être adjacentes...

   (c) Les deux suites convergent vers 1.

   Cependant, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{n+1}(n+(n+1))}{n(n+1)}$ est de signe alterné donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone donc les suites ne peuvent être adjacentes.

```
v(n):=1+((-1)^n)/n
```

(n)→1+((-1)^n)/n

```
factoriser(v(n+1)-v(n))
```

$$\frac{(-2n-1)-1^n}{(n+1)n}$$

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge manifestement en croissant vers 1.

```
u(n):=1-1/n
```

(n)→1-1/n

```
factoriser(u(n+1)-u(n))
```

$$\frac{1}{(n+1)n}$$

```
limite(u(n),n,+infinity)
```

1

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a + \dfrac{1}{n} = a$ et que la fonction ln est continue en tout réel strictement positif a, alors, pour tout réel positif a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln(a)$.

Pour que les suites aient la même limite, il est donc nécessaire que $\ln(a) = 1$, i.e. $a = \mathrm{e}$.

Or, pour tout entier naturel n, $\mathrm{e} + \frac{1}{n+1} < \mathrm{e} + \frac{1}{n}$ donc $v_{n+1} - v_n < 0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

On a donc trouvé une valeur de a telle que les suites soient adjacentes.

```
v(n):=ln(a+1/n)
```

(n)→ln(a+1/n)

```
resoudre(limite(v(n),n,+infinity)=limite(1-1/n,n,+infinity),a)
```

$[e^1]$

Exercice 3

1. Il faut choisir deux boules blanches parmi sept et une boule noire parmi trois. Les tirages de trois boules quelconques parmi les dix sont au nombre de $\binom{10}{3}$.

   La probabilité cherchée est donc

$$\frac{\binom{7}{2}\times\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{21}{40}$$

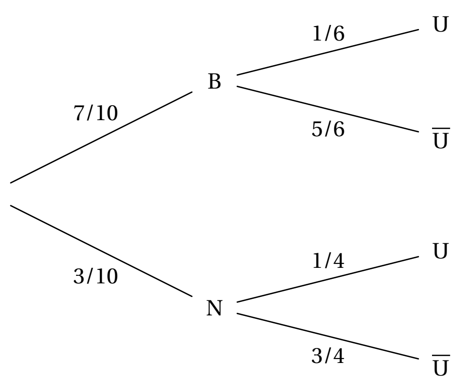
```
(binomial(7,2)*binomial(3,1))/binomial(10,3)
```

$$\frac{21}{40}$$

2. Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenues. X suit la loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{7}{10}$. On en déduit que la probabilité cherchée vaut :

$$\mathbb{P}(X=2)=\binom{5}{2}\times\left(\frac{7}{10}\right)^2\times\left(\frac{3}{10}\right)^3$$

3. Dressons un arbre avec des notations évidentes :



   Calcul de $p(\mathrm{U})$

   B et N forment une partition. D'après la formule des probabilités totales,

   $p(\mathrm{U}) = p(\mathrm{B}\cap\mathrm{U}) + p(\mathrm{N}\cap\mathrm{U}) = p(\mathrm{B})\times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{U}) + p(\mathrm{N})\times p_{\mathrm{N}}(\mathrm{U})$

   $p(\mathrm{U}) = \frac{7}{10}\times\frac{1}{6}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}=\frac{23}{120}$

Calcul de $p(\overline{\mathrm{U}})$

B et N forment une partition. D'après la formule des probabilités totales,

$$p(\overline{\mathrm{U}}) = p(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{U}}) + p(\mathrm{N}\cap\overline{\mathrm{U}}) = p(\mathrm{B})\times p_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{U}}) + p(\mathrm{N})\times p_{\mathrm{N}}(\overline{\mathrm{U}})$$

$$p(\overline{\mathrm{U}}) = \frac{7}{10}\times\frac{5}{6}+\frac{3}{10}\times\frac{3}{4} = \frac{97}{120}$$

Probabilités conditionnelles

$$p_{\mathrm{U}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{B}\cap\mathrm{U})}{p(\mathrm{U})} = \frac{\frac{7}{60}}{\frac{23}{120}} = \frac{14}{23}$$

$$p_{\mathrm{U}}(\mathrm{N}) = \frac{p(\mathrm{N}\cap\mathrm{U})}{p(\mathrm{U})} = \frac{\frac{3}{40}}{\frac{23}{120}} = \frac{9}{23}$$

$$p_{\overline{\mathrm{U}}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{U}})}{p(\overline{\mathrm{U}})} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{97}{120}} = \frac{70}{97}$$

$$p_{\overline{\mathrm{U}}}(\mathrm{N}) = \frac{p(\mathrm{N}\cap\overline{\mathrm{U}})}{p(\overline{\mathrm{U}})} = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{97}{120}} = \frac{27}{97}$$

La probabilité cherchée est $p_{\mathrm{U}}(\mathrm{B}) = \frac{14}{23}$.

4. La probabilité cherchée est :

$$p(1\leqslant \mathrm{X}\leqslant 3) = \int_1^3 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_1^3 = \mathrm{e}^{-\lambda}-\mathrm{e}^{-3\lambda}$$

```
int(k*exp(-k*t),t,1,3)
```

$$-\left(e^{-k\cdot 3}\right)+e^{-k}$$

Exercice 4

1. (a) yaka calculer :

```
a:=1+i*sqrt(3)
```

$$1+(i)\sqrt{3}$$

```
evalc(a^2-4*a)
```

$$-6+(i)(-2\sqrt{3})$$

```
evalc(2*conj(a)-8)
```

$$-6+(i)(-2\sqrt{3})$$

(b) On calcule $|\alpha| = \sqrt{1+3} = 2 = \left|\overline{\alpha}\right|$ donc B et C sont à la distance 2 de O et appartiennent donc à $\mathscr{C}$.

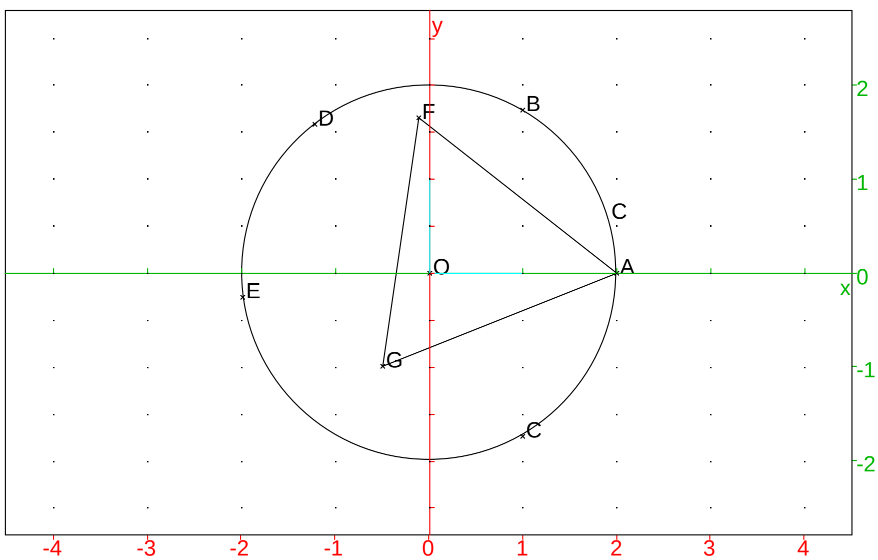
```
abs(a)
```

$$2$$

2. (a) Voici la figure complétée :

```
A:=point(2);
O:=point(0);
C:=cercle(O,2);
B:=point(a);
C:=point(conj(a));
D:=point(2*exp((17*i*Pi/24)));
E:=rotation(O,Pi/3,D);
F:=milieu(B,D);
G:=milieu(C,E);
triangle(A,F,G)
```

```
read("figureBac.g");
```



(b) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ a pour expression complexe :

$$z \mapsto z e^{i\frac{\pi}{3}} = z\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} z$$

On en déduit que $z_{\mathrm{E}} = z_{\mathrm{D}} \cdot \frac{\alpha}{2} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \frac{\alpha}{2} = \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

```
affixe(E)
```

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{(i)\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 2e^{\frac{(17*i)\pi}{24}}$$

```
evalc(affixe(E)-affixe(D)*a/2)
```

$$0$$

3. (a) On obtient successivement :

$$\begin{aligned} z_F &= \frac{z_B + z_D}{2} \\ &= \frac{\alpha + 2e^{i\theta}}{2} \\ &= \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta} \end{aligned}$$

(b) D'après 1.a. $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$. Or

$$\begin{aligned} \frac{z_G - 2}{z_F - 2} &= \frac{\frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2} - 2}{\frac{\alpha}{2} + e^{i\theta} - 2} \\ &= \frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha} - 4}{2e^{i\theta} + \alpha - 4} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(2\alpha e^{i\theta} + 2\overline{\alpha} - 8\right)}{\frac{1}{\alpha}\left(2\alpha e^{i\theta} + \alpha^2 - 4\alpha\right)} \\ &= \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

```
evalc((affixe(G)-2)/(affixe(F)-2))
```

$$\frac{1}{2} + \frac{(i)}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Or $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{z_G - z_A}{z_F - z_A} = \frac{z_{\overline{AG}}}{z_{\overline{AF}}}$.
On en déduit que $\frac{AG}{AF} = \frac{|\alpha|}{2} = \frac{2}{2} = 1$.
Le triangle AFG est donc isocèle de sommet principal A.
Or $\text{Arg}\frac{z_{\overline{AG}}}{z_{\overline{AF}}} = \left(\overline{AF}, \overline{AG}\right) = \text{Arg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.
Le triangle isocèle AFG ayant un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ est donc équilatéral.

4. Complétons le tableau de variations :

x	$-\pi$		$\frac{(-\pi)}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
Variations de f	7	$\searrow$	$-2\sqrt{3}+4$	$\nearrow$	$2\sqrt{3}+4$	$\searrow$	7

On en déduit que AF^2 admet un minimum sur $[-\pi, \pi]$ qui vaut $4 - 2\sqrt{3}$ donc AF aussi car $AF > 0$ et la fonction carré est une bijection strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.