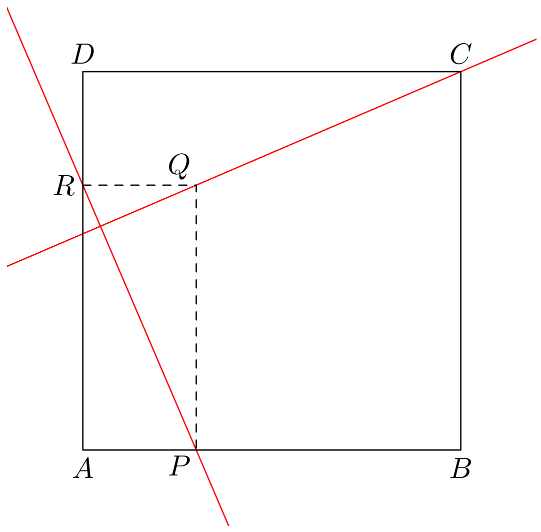
Exercice 1



Soit un carré $ABCD$. On construit un rectangle $APQR$ tel que :

- P et R sont sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$ du carré ;
- $AP = DR$.

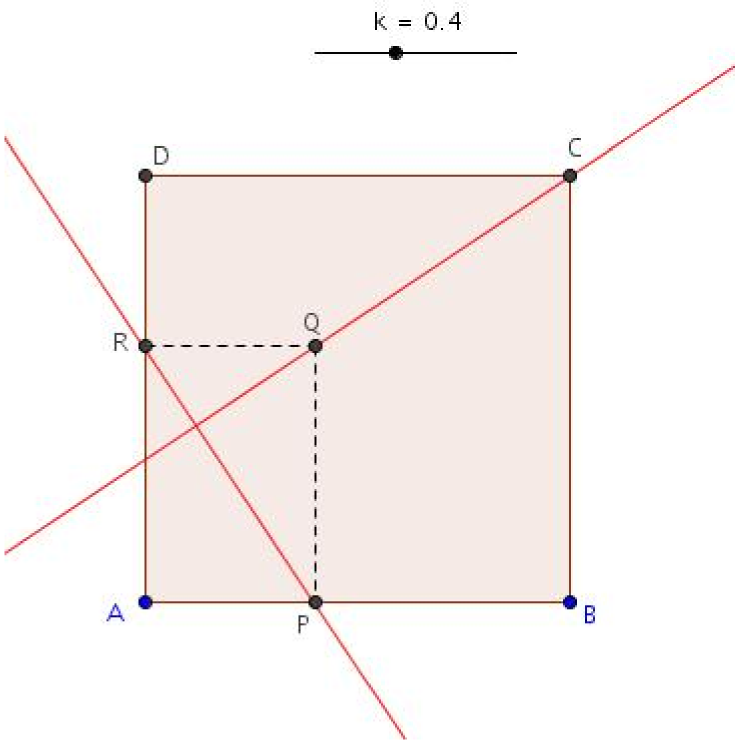
Le problème a pour objet de montrer que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.

1) Justifier que :

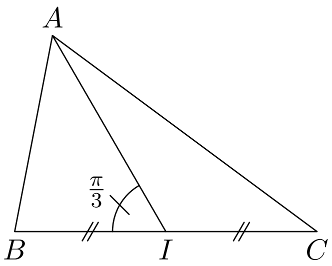
$$\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CQ} \cdot (\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP})$$

2) En déduire que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.

Illustration



Exercice 2



ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$.
On donne : $BC = 4$, $AI = 3$ et $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \dfrac{\pi}{3}$.
Calculer :

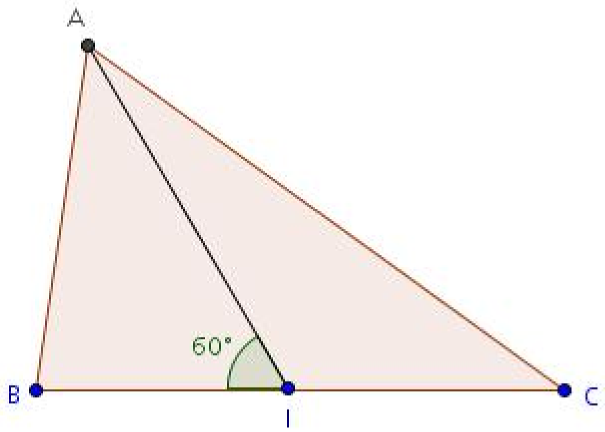
1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;

2) $AB^2 + AC^2$;

3) $AB^2 - AC^2$;

4) AB et AC.

Illustration



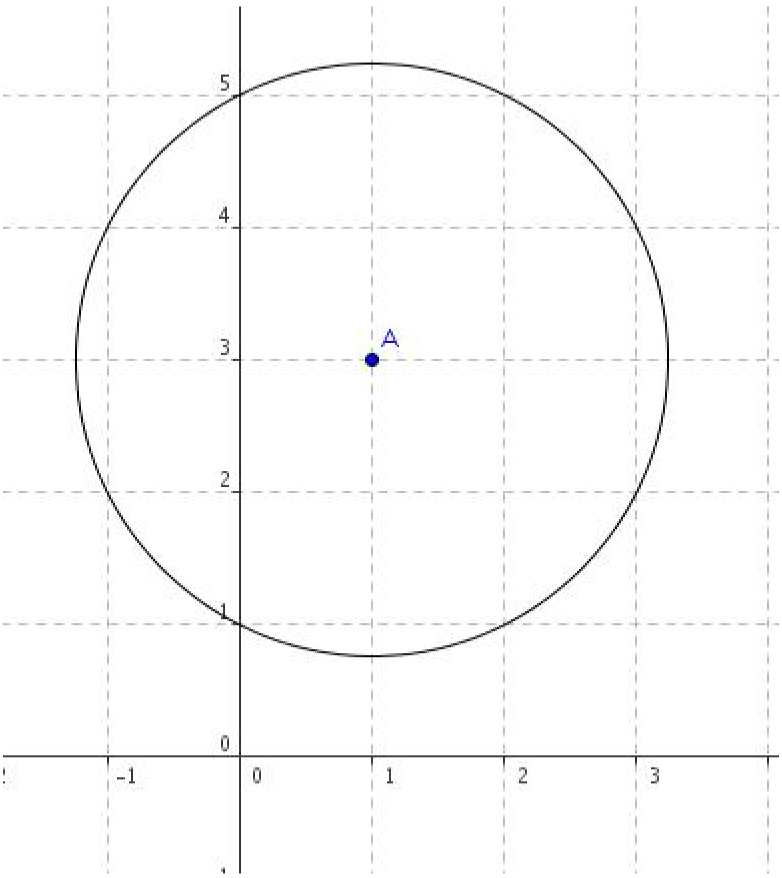
Exercice 3

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.
Examiner si les équations suivantes sont des équations de cercle et, le cas échéant, préciser le centre et le rayon du cercle.

1) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0.$

2) $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0.$

Illustration



Exercice 4

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.

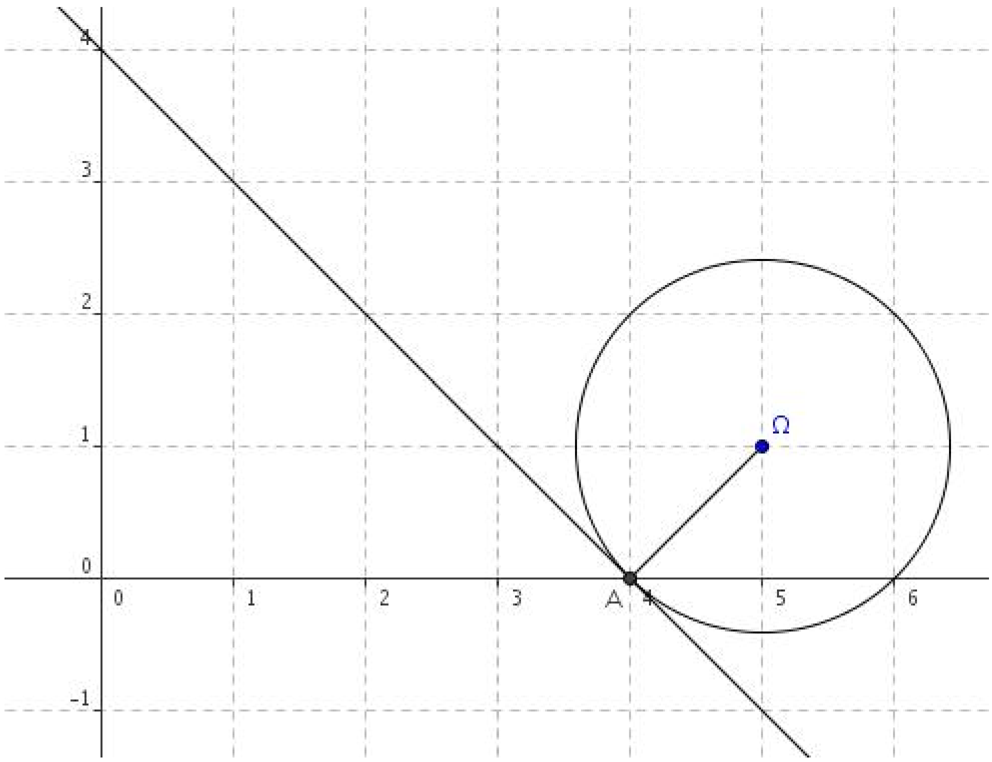
Déterminer l'équation du cercle de centre $\Omega(5\ ;\ 1)$ tangent à la droite (D) d'équation :

$$x + y - 4 = 0.$$

Indication : on rappelle que la distance entre un point $A(\alpha\ ;\ \beta)$ et une droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ est donnée par la formule :

$$d(A\ ;\ D) = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Illustration



Exercice 5

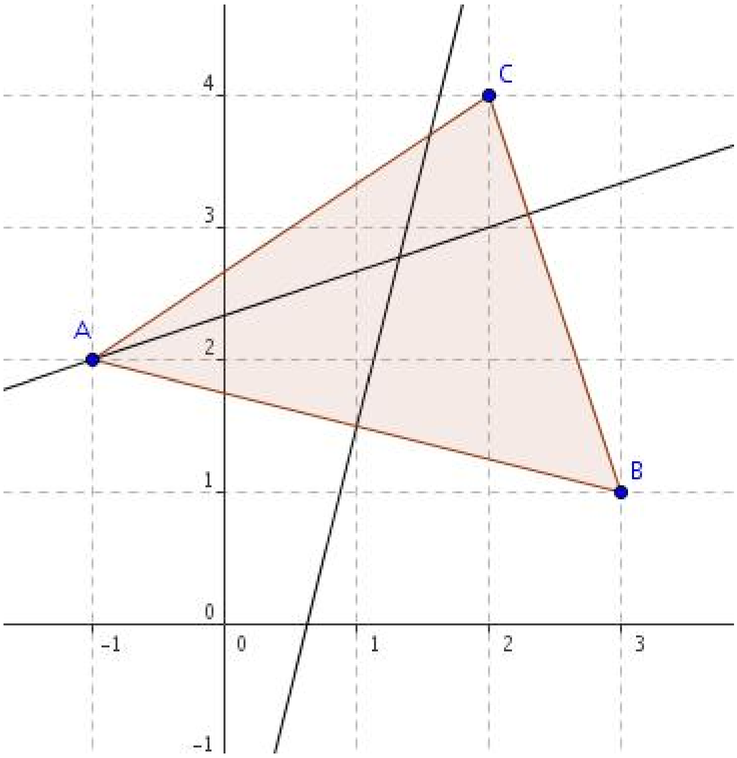
On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

On considère un triangle ABC avec $A(-1\ ;\ 2)$, $B(3\ ;\ 1)$ et $C(2\ ;\ 4)$.

1) Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

2) Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Illustration



Exercice 6

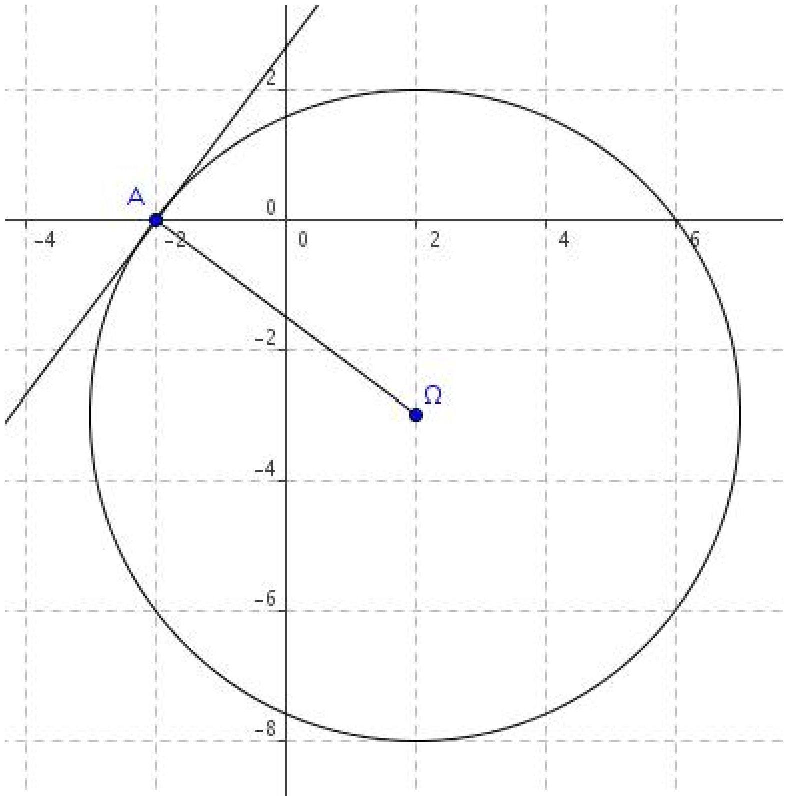
Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$, on donne un point $\Omega(2\ ;\ -3)$.

1) Déterminer l'équation du cercle $(\mathcal{C})$ de centre Ω et de rayon $R = 5$.

2) Démontrer que le point $A(-2\ ;\ 0)$ est un point du cercle $(\mathcal{C})$.

3) Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle $(\mathcal{C})$.

Illustration



Exercice 7

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points suivants : $A(2 ; 1)$, $B(7 ; 2)$ et $C(3 ; 4)$.

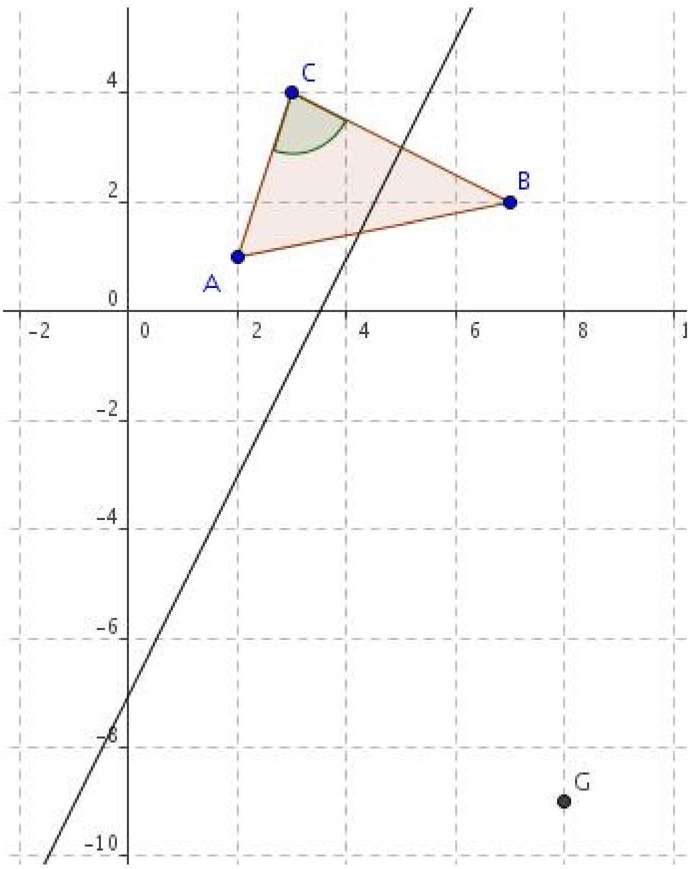
Toutes les questions suivantes sont indépendantes et sans rapport.

1) Calculer les coordonnées du barycentre G de $(A ; 3)$, $(B ; 2)$ et $(C ; -4)$.

2) Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[BC]$.

3) Calculer $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$. L'angle $\widehat{C}$ est-il droit ?

Illustration



Exercice 8

ABC est un triangle équilatéral de côté $5\ cm$. I est le milieu de $[BC]$.

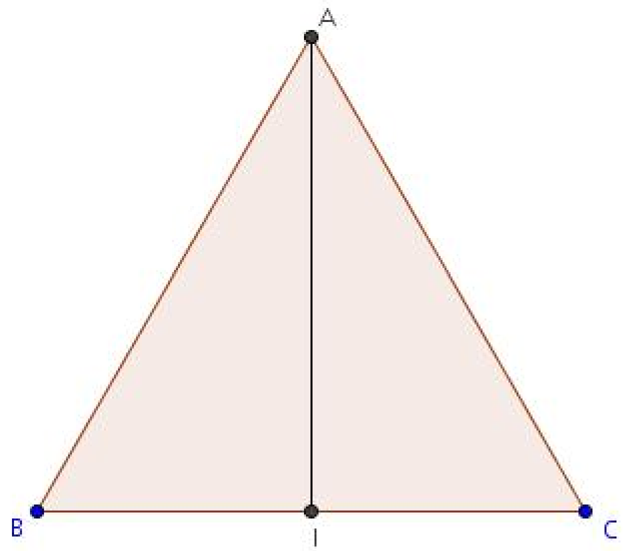
Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$;

2) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI}$;

3) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI}$.

Illustration

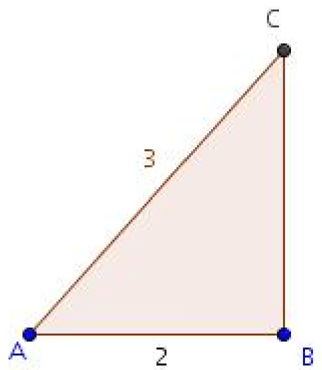


Exercice 9

ABC est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$. De plus $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$.

Ce triangle est-il rectangle ? Si oui, préciser en quel sommet.

Illustration



Exercice 10

$MNPQ$ est un carré avec $MN = 6$. I est le centre du carré.

Calculer les produits scalaires suivants :

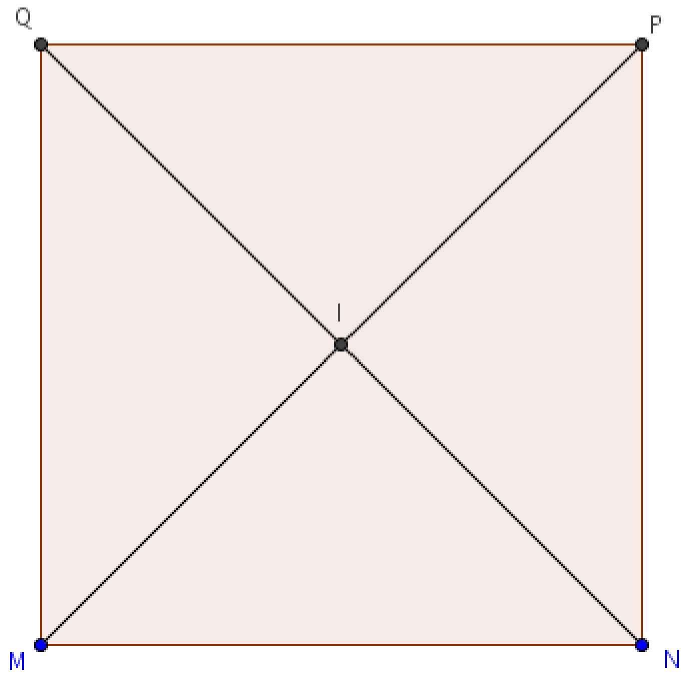
1) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{QP}$;

2) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PN}$;

3) $\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{IP}$;

4) $\overrightarrow{QI} \cdot \overrightarrow{NI}$.

Illustration

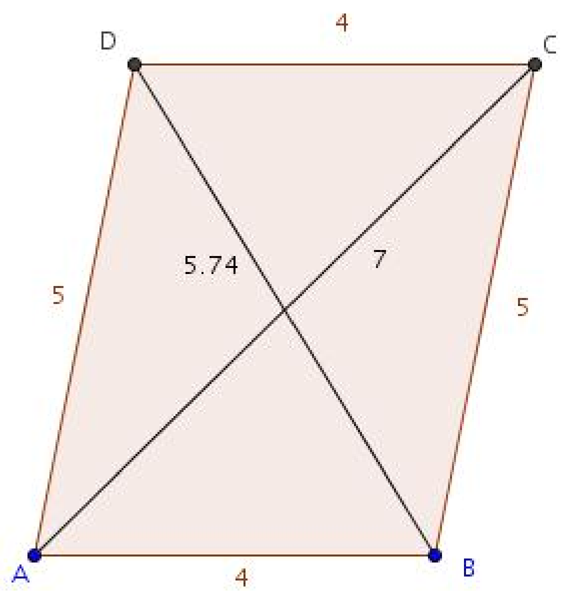


Exercice 11

$ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$. En déduire BD.

Illustration



Exercice 12

Démontrer que : $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=4\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ et $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2+\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=2\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2\right)$.

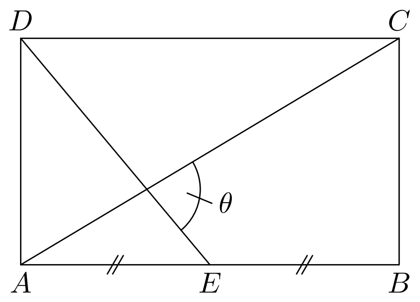
Lien avec le losange, le parallélogramme ?

Démontrer que :

$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2$$

En déduire qu'un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires si et seulement si ses côtés sont égaux.

Exercice 13



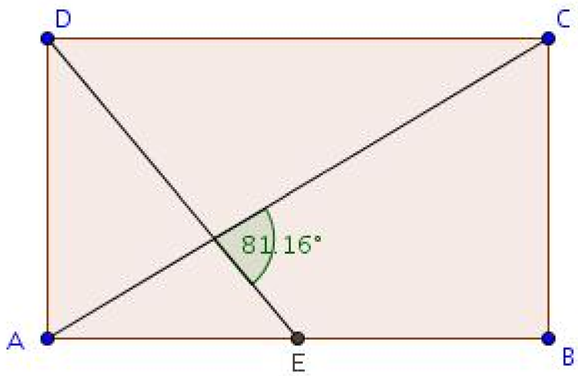
$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$.
E est le milieu de $[AB]$.

1) Calculer les longueurs AC et DE.

2) En exprimant chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE}$.

3) En déduire la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AC})$ en degrés à $0,01$ près.

Illustration



Exercice 14

Soit le triangle ABC et K le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.
On donne : $AB = 6$, $BK = 4$ et $KC = 7$.

1) I est le milieu de $[BC]$ et G est le centre de gravité du triangle ABC. Faire une figure.

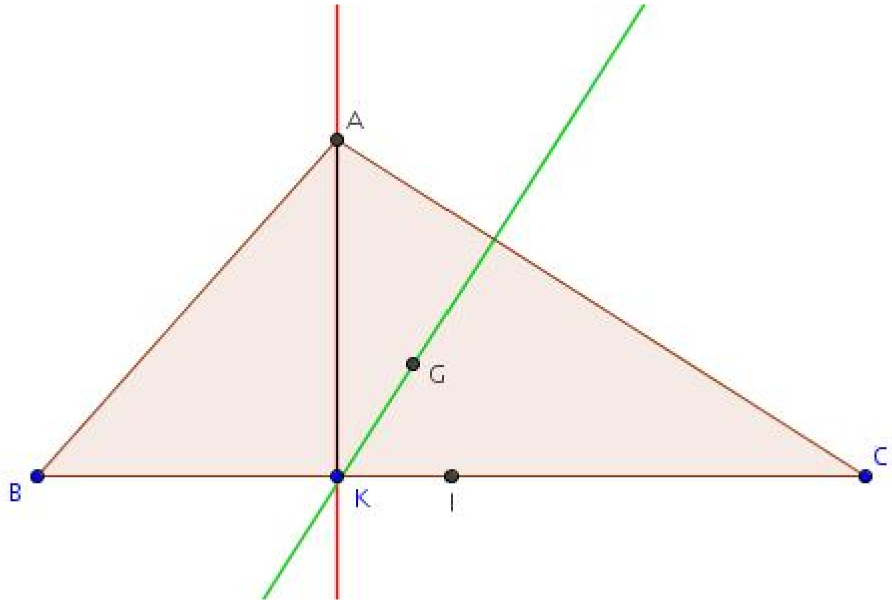
2) Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IB}$ ainsi que la somme :

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

3) Déterminer et représenter en rouge l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = 44$.

4) Déterminer et représenter en vert l'ensemble des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Illustration

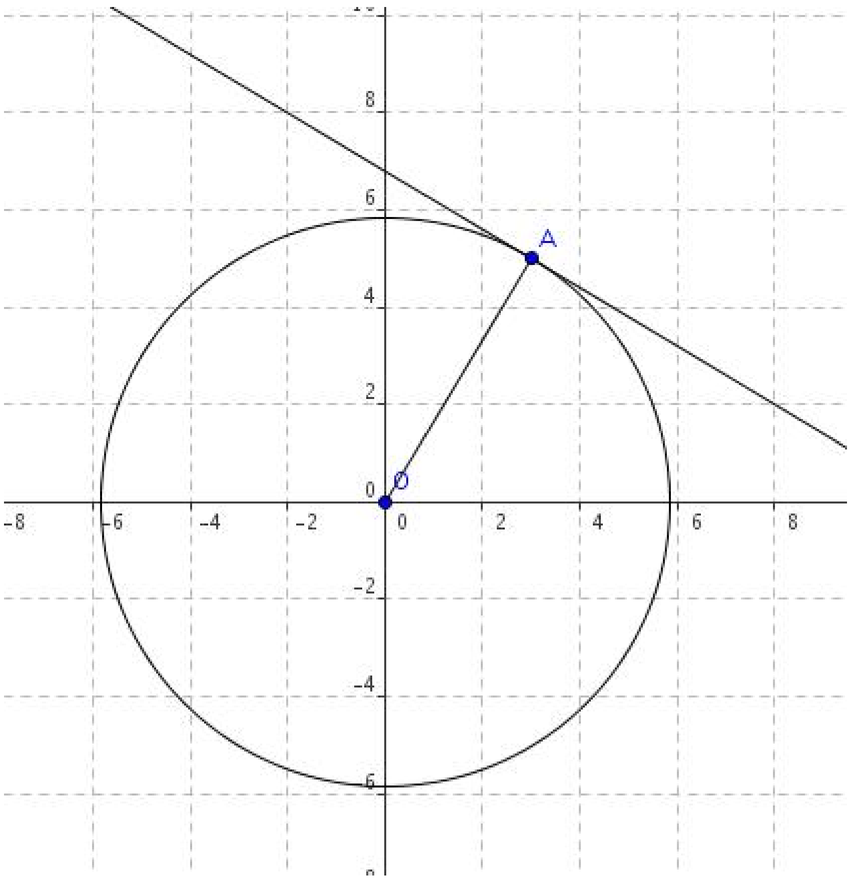


Exercice 15

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $A(3\ ;\ 5)$.

Chercher une équation de la tangente en A au cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon OA.

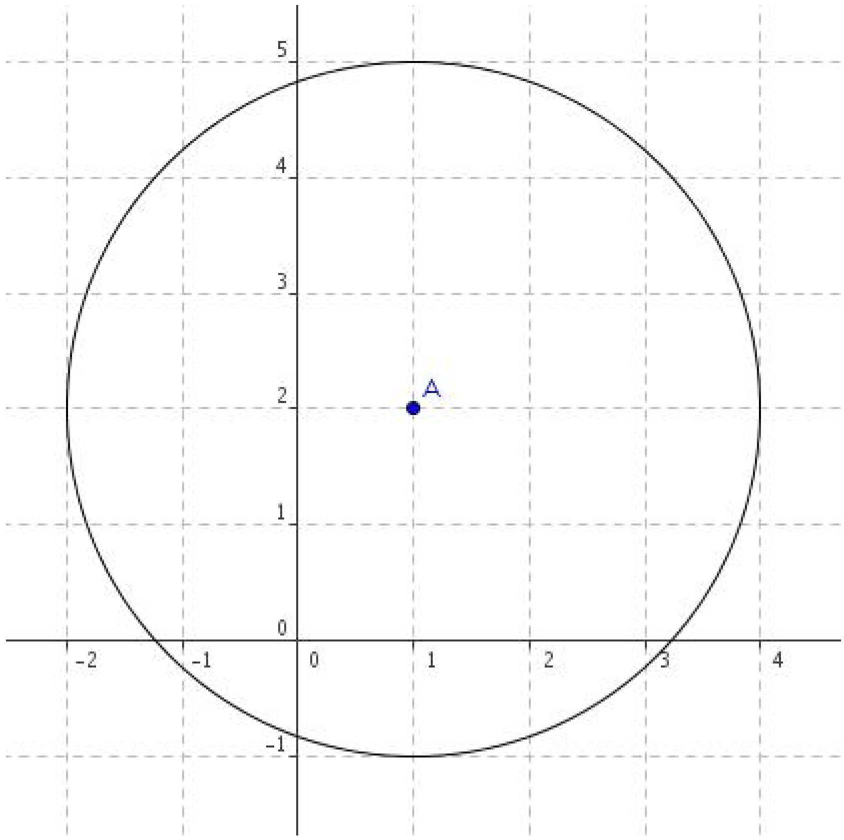
Illustration



Exercice 16

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, trouver une équation du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $A(1\,;\,2)$ et de rayon 3 et déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec les axes de coordonnées.

Illustration



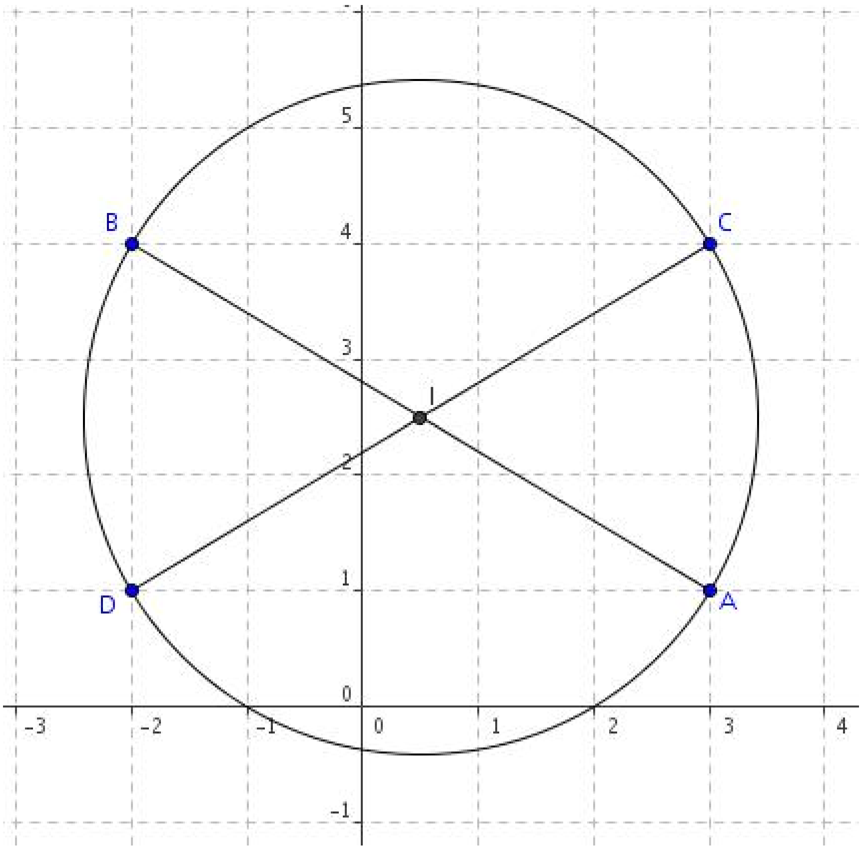
Exercice 17

Soient $A(3\ ;\ 1)$ et $B(-2\ ;\ 4)$ dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

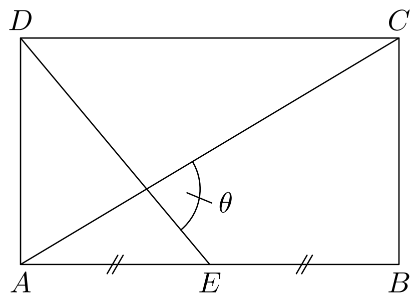
Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan dont les coordonnés $(x\ ;\ y)$ vérifient l'équation :

$$(x-3)(x+2)+(y-1)(y-4)=0.$$

Illustration



Exercice 18



$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O, de rayon R et A est un point fixé du plan.

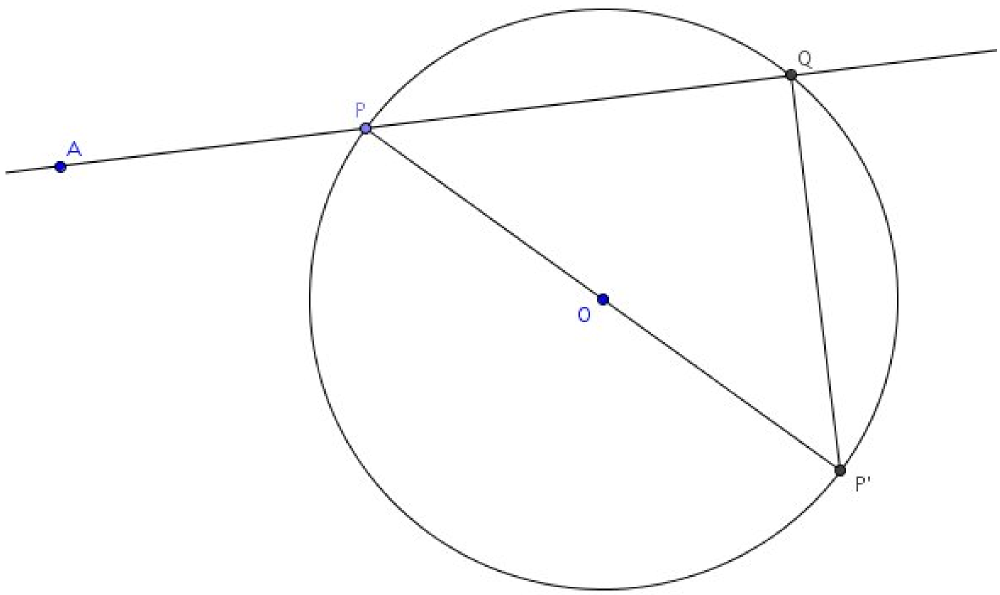
Le but du problème est d'établir la propriété suivante : « Quelle que soit la droite (d) passant par A, coupant le cercle $(\mathcal{C})$ en deux points P et Q, le produit scalaire $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ est constant. »

1) Soit P' le point diamétralement opposé à P.
Montrer que :
$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{P'}.$$

2) Montrer que :
$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'}=AO^2-R^2.$$

3) Conclure.

Illustration



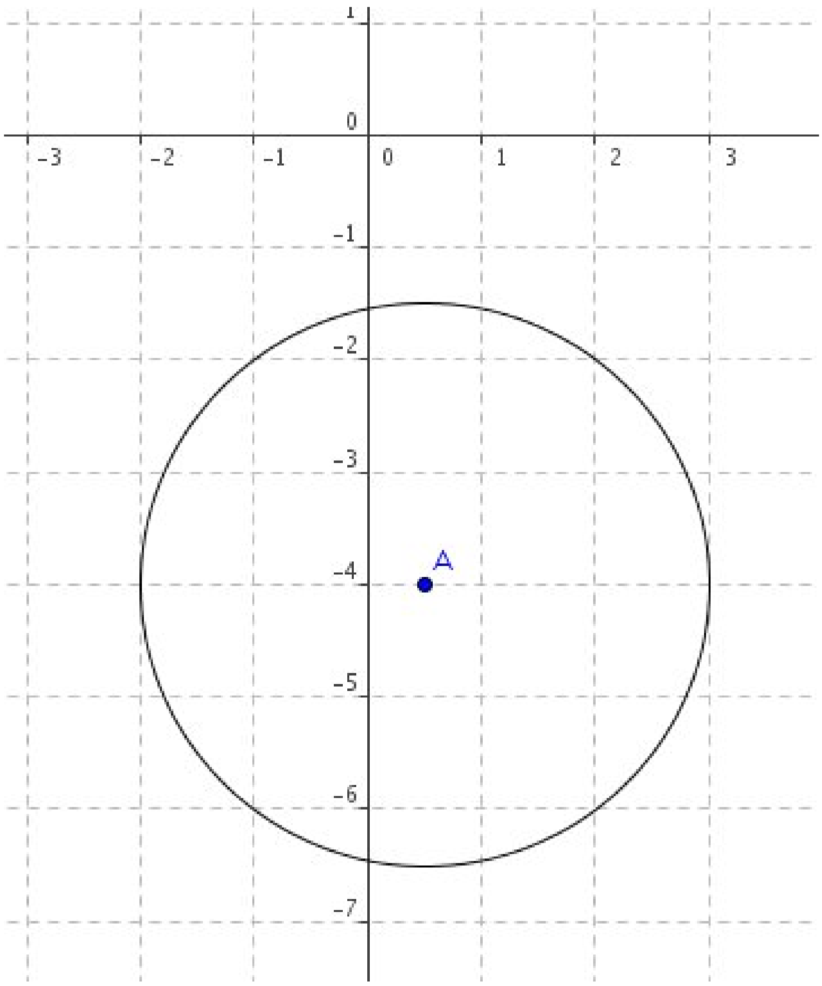
Exercice 19

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer le centre et le rayon du cercle $(\mathcal{C})$ dont une équation est :

$$x^2+y^2-x+8y+10=0.$$

Illustration



Exercice 20

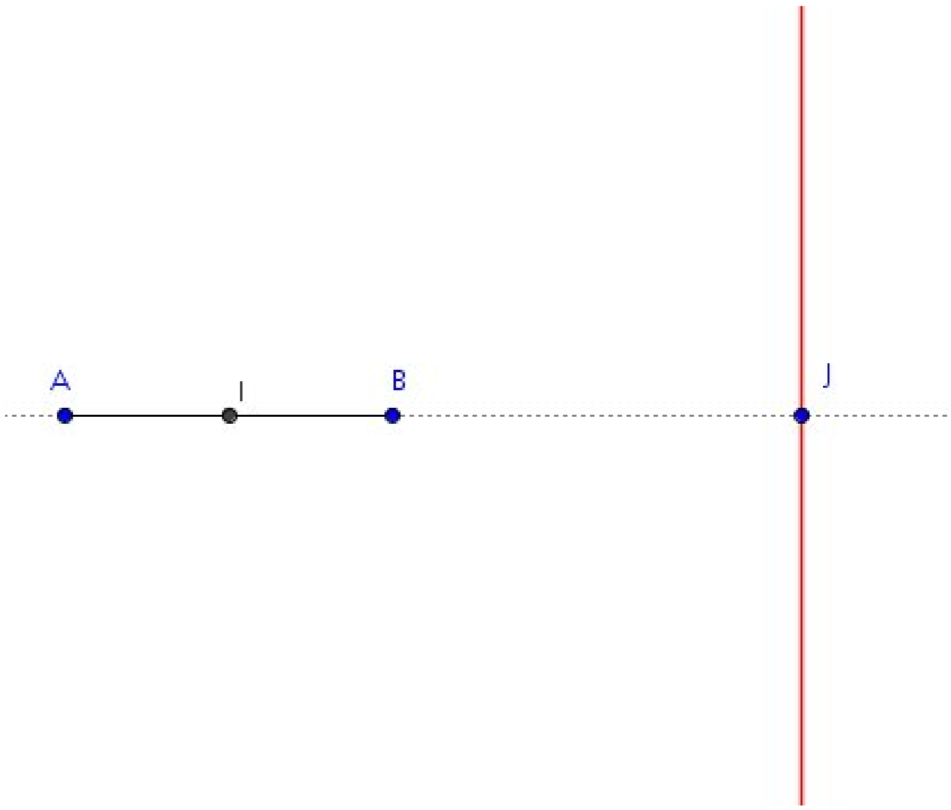
$[AB]$ est un segment de milieu I et $AB = 2\ cm$.

1) Montrer que pour tout point M du plan :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

2) Trouver et représenter l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = 14$.

Illustration



Exercice 21

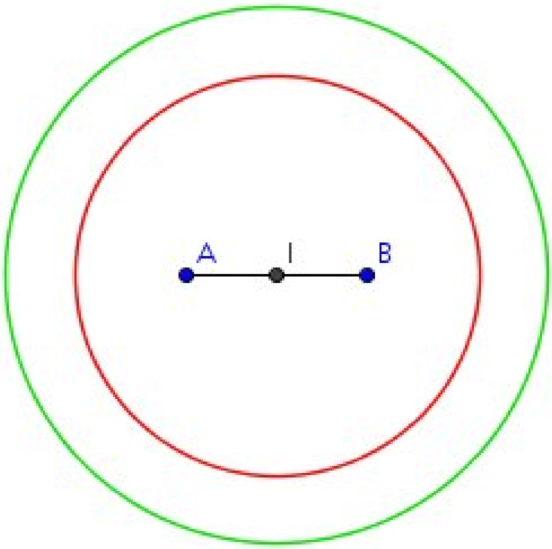
On considère un segment $[AB]$ tel que $AB = 1\ dm$.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

1) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1$;

2) $MA^2 + MB^2 = 5$.

Illustration



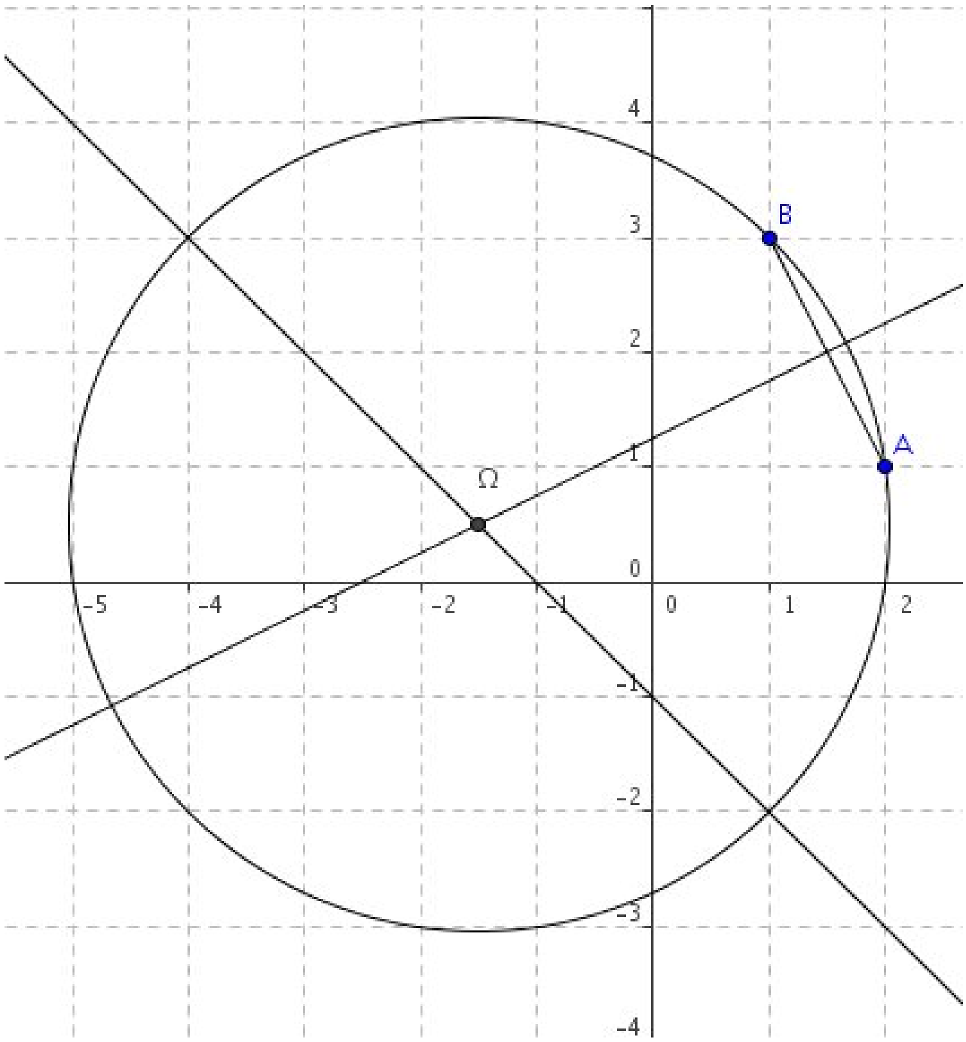
Exercice 22

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'équation du cercle $(\mathcal{C})$ passant par $A(2\ ;\ 1)$ et $B(1\ ;\ 3)$ et dont le centre Ω soit situé sur la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x + y + 1 = 0$.

Indication : chercher d'abord les coordonnées de Ω.

Illustration



Exercice 23

Soit $ABCD$ un rectangle et M un point quelconque du plan.

Démontrer que :

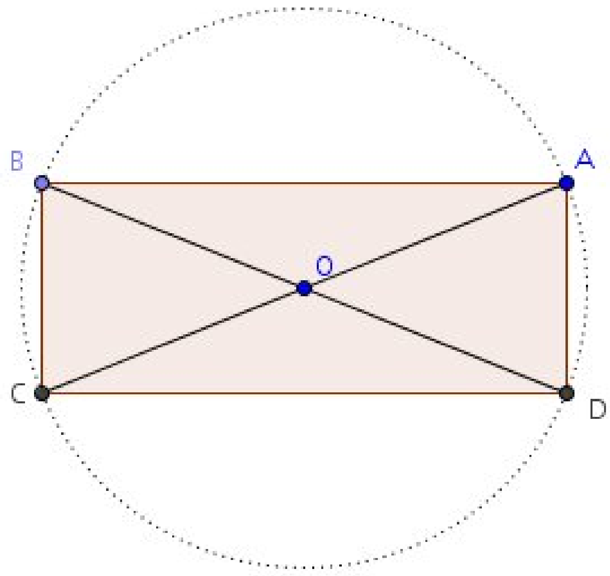
$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

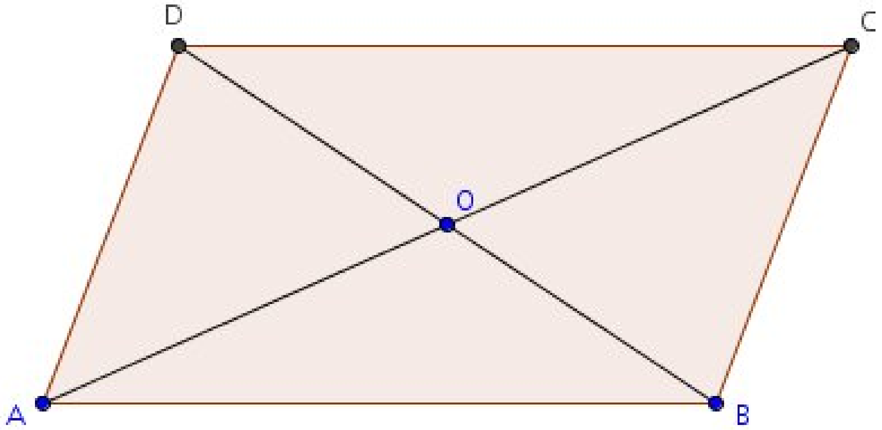
Soit $ABCD$ un parallélogramme et M un point quelconque du plan.

Démontrer que :

$$MD^2 - MC^2 = MA^2 - MB^2.$$

Illustration





Exercice 24

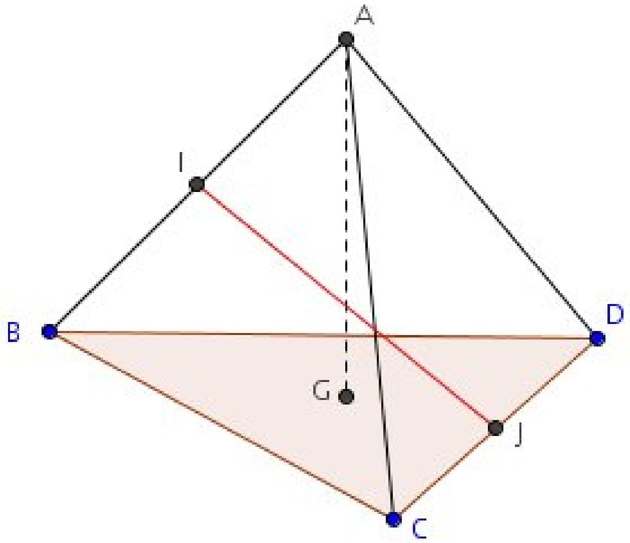
$ABCD$ est un tétraédre régulier de côté a. I est le milieu du côté $[AB]$ et J est le milieu du côté $[CD]$.

1) Calculer en fonction de a les produits scalaires suvants :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA}$.

2) Calculer et interpréter le produit scalaire suivant : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$.

3) Calculer et interpréter le produit scalaire suivant : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ}$.

Illustration



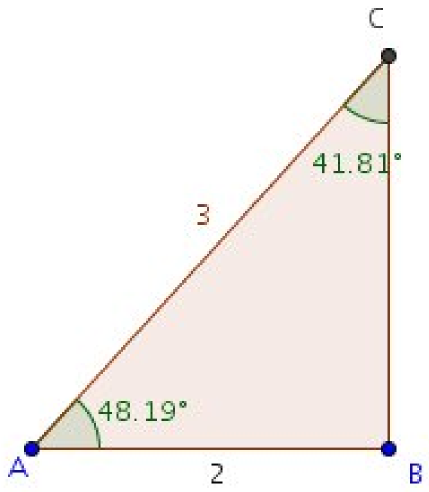
Exercice 25

ABC est un triangle tel que $AB = 2$, $AC = 3$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$.

1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

2) Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ puis une mesure des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ en degrés, à $0,1$ près.

Illustration



Exercice 26

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.

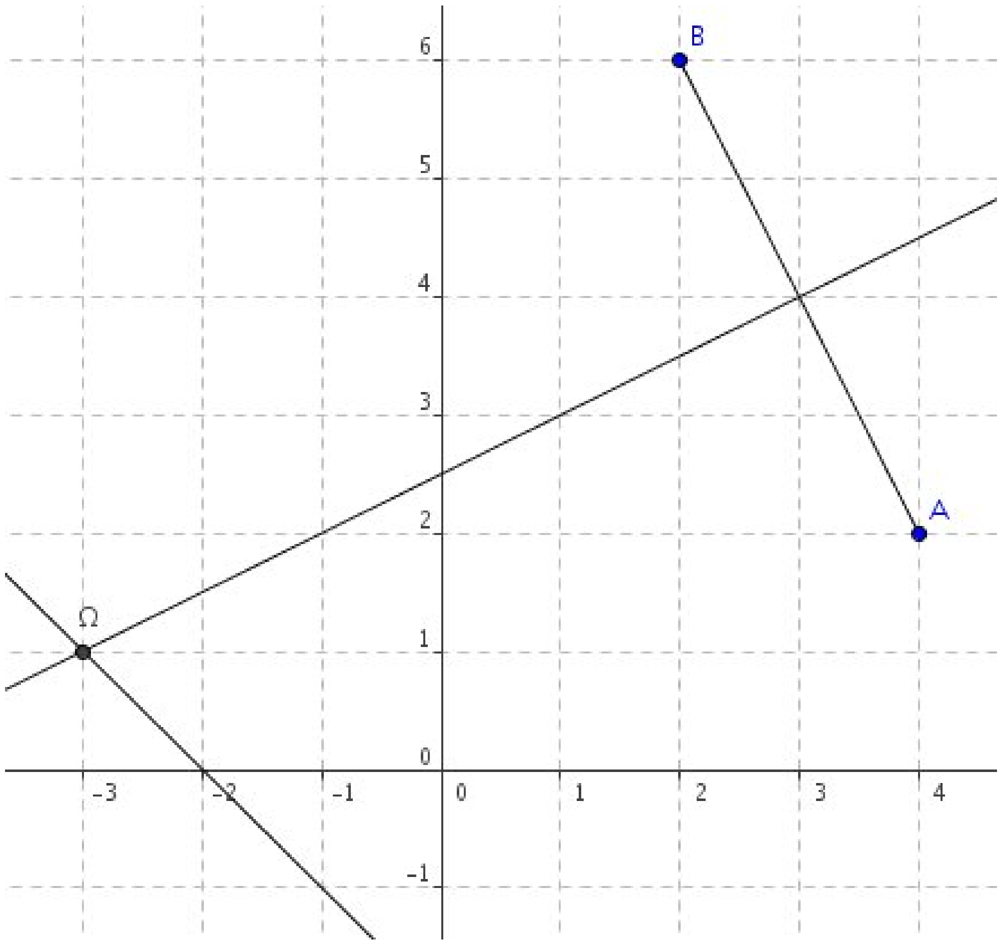
On considère le cercle $(\mathcal{C})$ passant par les points $A(4\ ;\ 2)$ et $B(2\ ;\ 6)$ et dont le centre Ω est situé sur la droite (D) d'équation $x + y + 2 = 0$.

1) Faire une figure.

2) Déterminer les coordonnées de Ω.

3) Déterminer une équation de $(\mathcal{C})$.

Illustration



Exercice 27

Le but de cet exercice est de démontrer, à l'aide du produit scalaire, que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

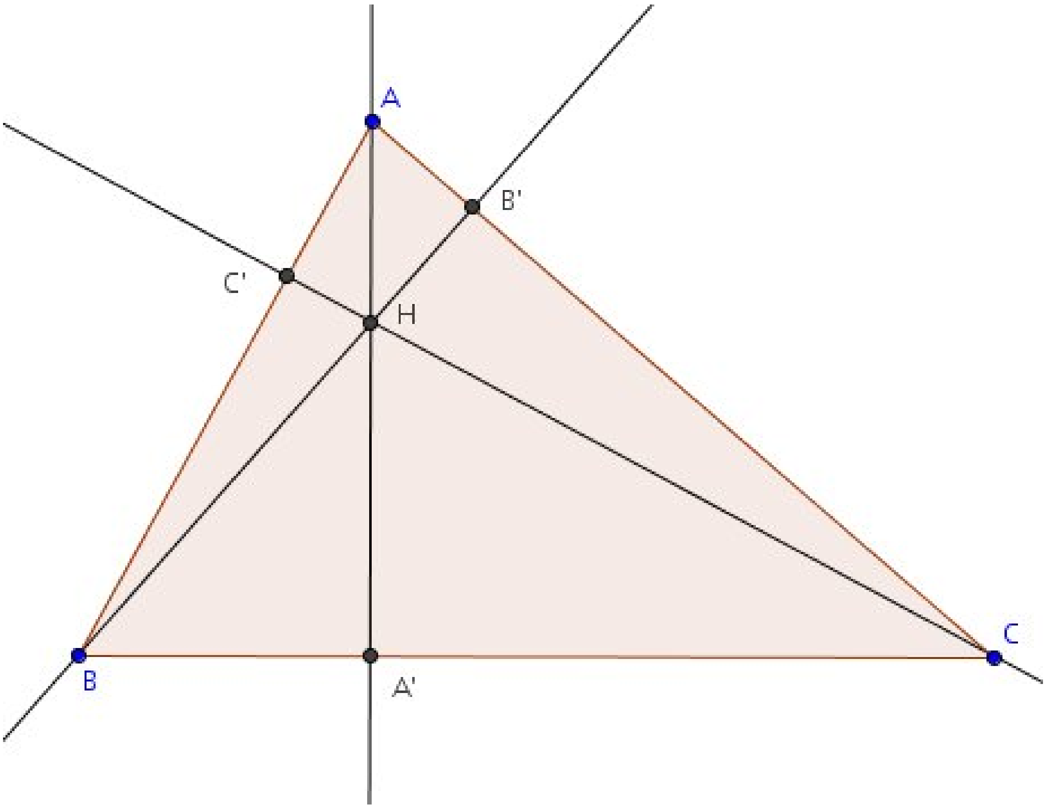
Soit ABC un triangle. On note A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B et C sur (BC), (AC) et (AB).
On note $H = (BB') \cap (CC')$.

1) Que valent les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB}$?

2) Calculer $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$.

3) Conclure.

Illustration



Exercice 28

Les vecteurs $\overrightarrow{u}(4\,876\ ;\ -4\,898\,873)$ et $\overrightarrow{v}(317\,019\,173\ ;\ 315\,539)$ sont-ils orthogonaux ?

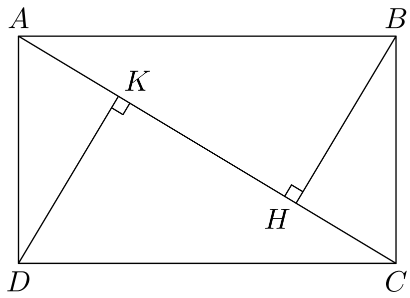
Exercice 29

Dans l'espace muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'équation suivante est-elle celle d'une sphère ?

$$x^2 + y^2 + z^2 - y + 2z + \frac{1}{2} = 0$$

Si oui, préciser les coordonnées de son centre Ω et son rayon R.

Exercice 30

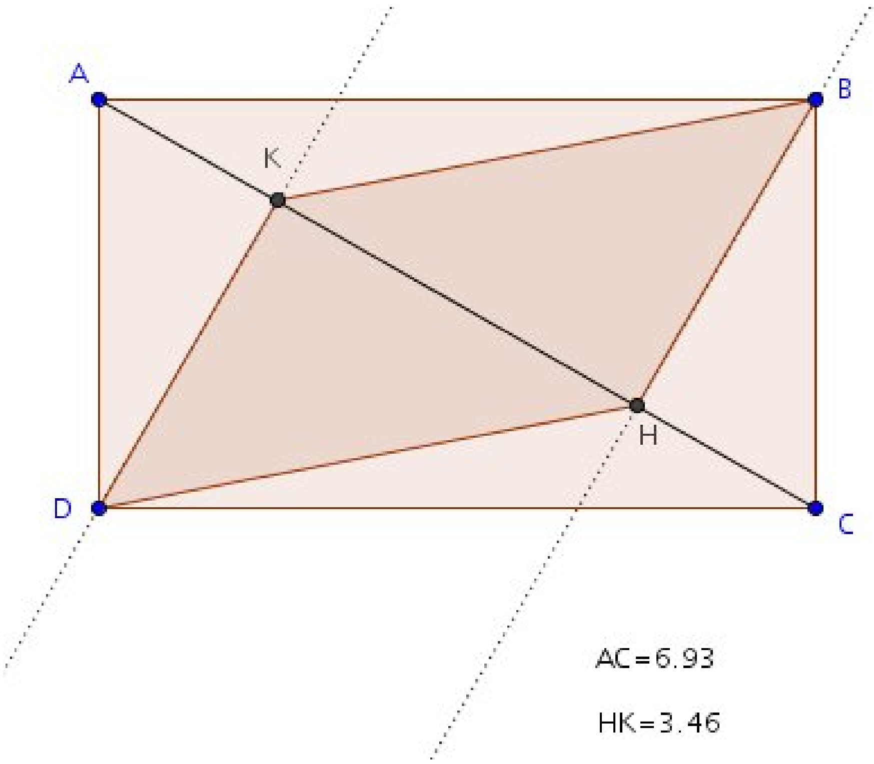


$ABCD$ est un rectangle de longueur L et de largeur l. Soient H et K les projetés orthogonaux des sommets B et D sur la diagonale (AC).

1) Calculer HK en fonction des longueurs des côtés L et l.
On pourra évaluer de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD}$.

2) Comment choisir L et l pour avoir $AC = 2\,HK$?
Exprimer alors l'aire du parallélogramme $BHDK$ en fonction de l'aire du rectangle $ABCD$.

Illustration



Exercice 31

A quelle condition sur les points A, B et C a-t-on : $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2=(AB+AC)^2$?

Exercice 32

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne $A(-2\ ;\ 2)$ et $B(2\ ;\ 2)$.

1) Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.

2) Démontrer que, pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

3) Démontrer que l'ensemble E des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 40$ est un cercle $(\mathcal{C})$ de centre I et de rayon $r = 4$.

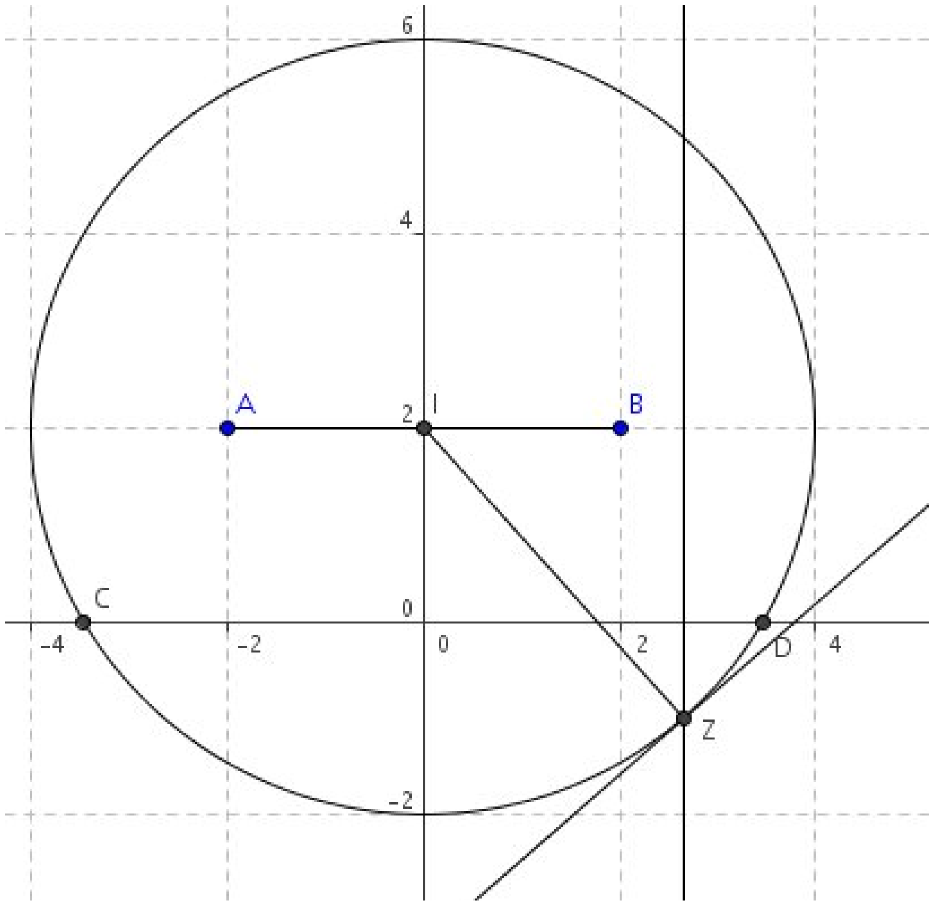
4) Déterminer une équation du cercle $(\mathcal{C})$.

5) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses.

6) Soit λ un réel négatif. Comment choisit λ pour que le point $Z(\sqrt{7}\ ;\ \lambda)$ soit sur $(\mathcal{C})$.

7) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point Z.

Illustration



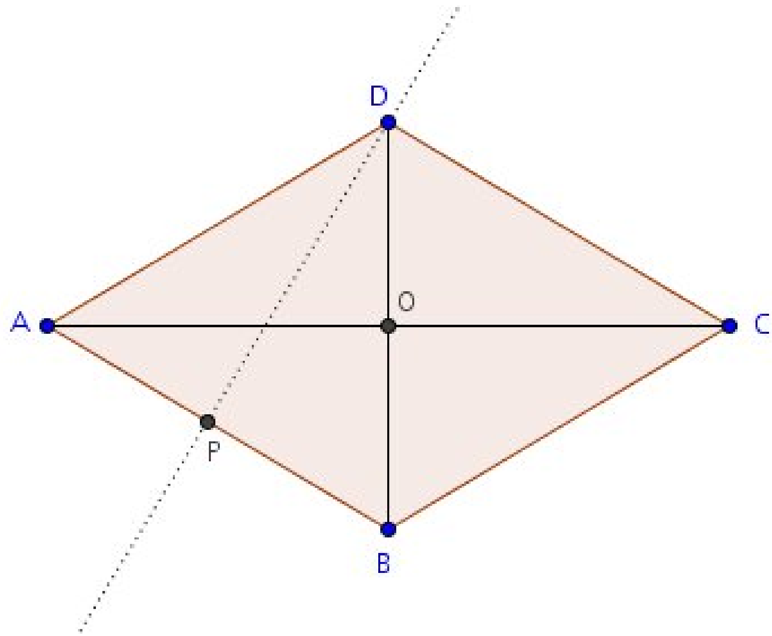
Exercice 33

$ABCD$ est un losange de sens direct et de centre O. On donne $AC = 10$ et $BD = 6$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

2) On note P le projeté orthogonal de D sur la droite (AB). Calculer AP.

Illustration



Exercice 34

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les deux cercles $(\mathcal{C})_1$ et $(\mathcal{C}_2)$ déquations respectives :

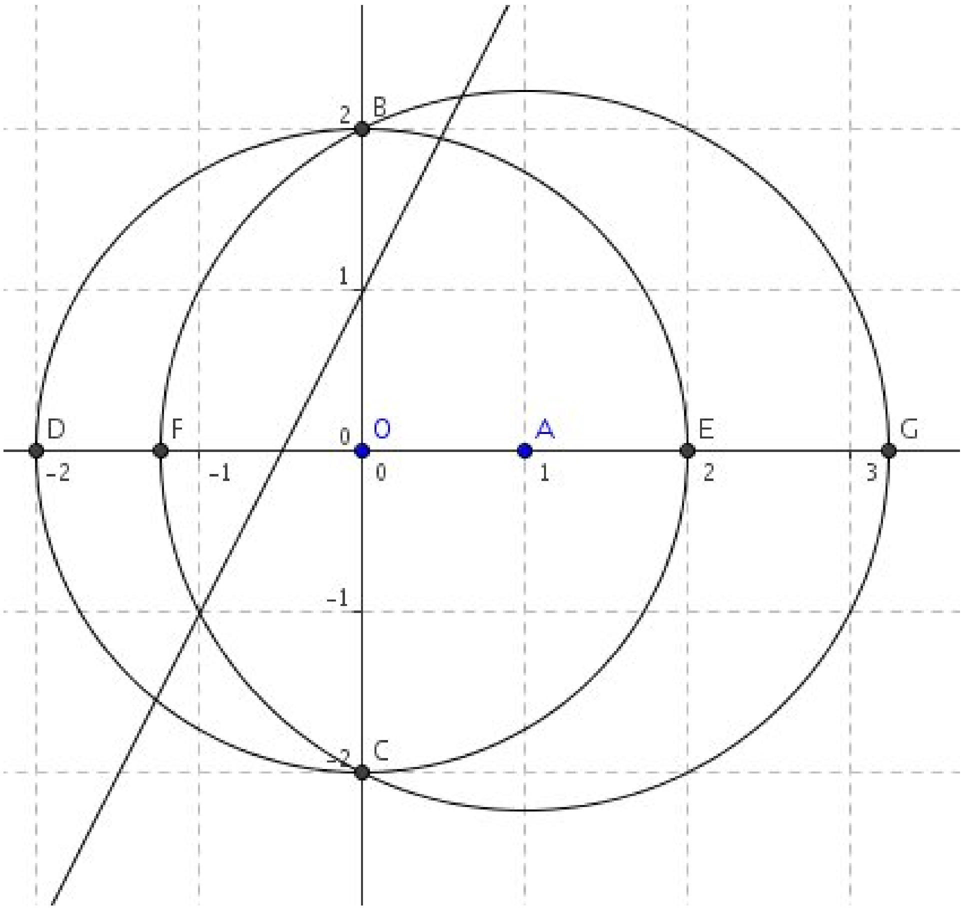
$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 2x = 4.$$

1) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de chaque cercle avec les axes de coordonnées.

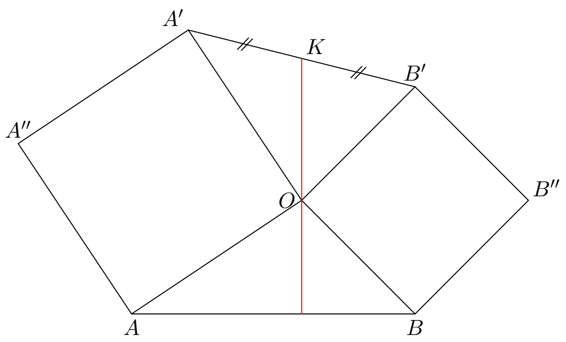
2) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection des deux cercles.

3) Soit (D) la droite d'équation $y = 2x + 1$.
Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection des cercles avec (D).

Illustration



Exercice 35



Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère un triangle OAB de sens direct. On construit, à l'extérieur de ce triangle des carrés $OAA"A'$ et $OBB"B'$. Voir figure ci-dessus.

On note K le milieu de $[A'B']$.

1) Démontrer que les angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OA'})$ sont aupplémentaires.

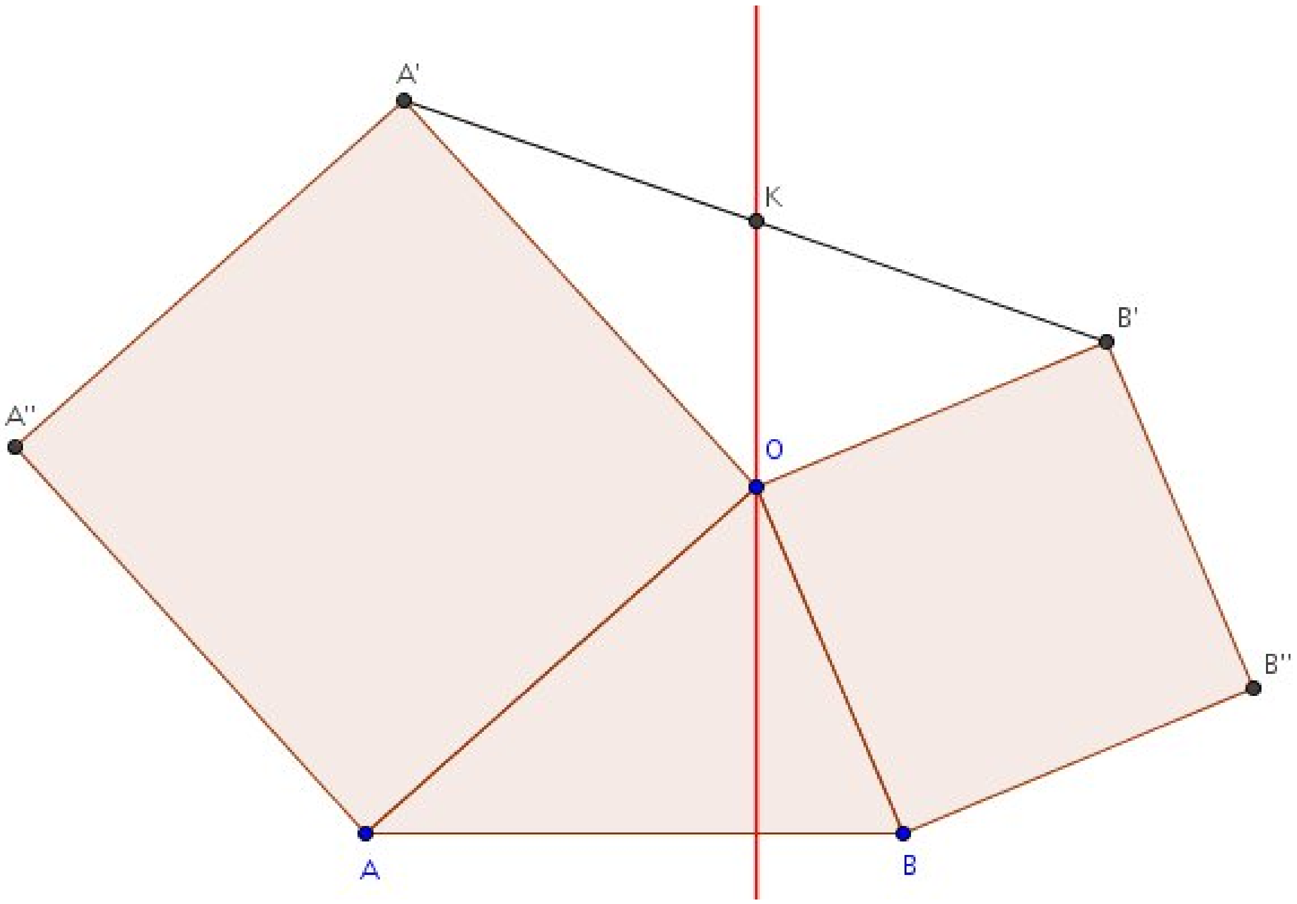
2) Démontrer que :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OB}.$$

3) Calculer $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{AB}$.
En déduire que la médiane issue de O dans le triangle $OA'B'$ est la hauteur issue de O dans le triangle OAB.

4) Démontrer que les droites (AB) et $(A'B')$ sont perpendiculaires.

Illustration



Exercice 36

ABC est un triangle rectangle en A.
A' est le milieu de $[BC]$ et H est le pied de la hauteur issue de A.
On appelle I et J les projetés orthogonaux de H respectivement sur (AB) et $AC)$.
On veut montrer que les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires.

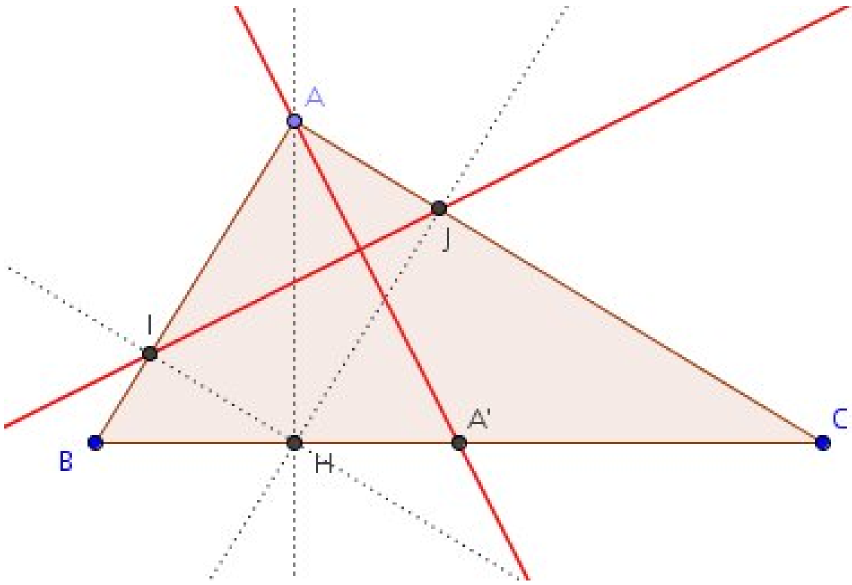
1) Faire un schéma.

2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ en fonctions des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3) Justifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ et que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$.

4) En utilisant les résultats précédents, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{IJ}$.
Conclure.

Illustration



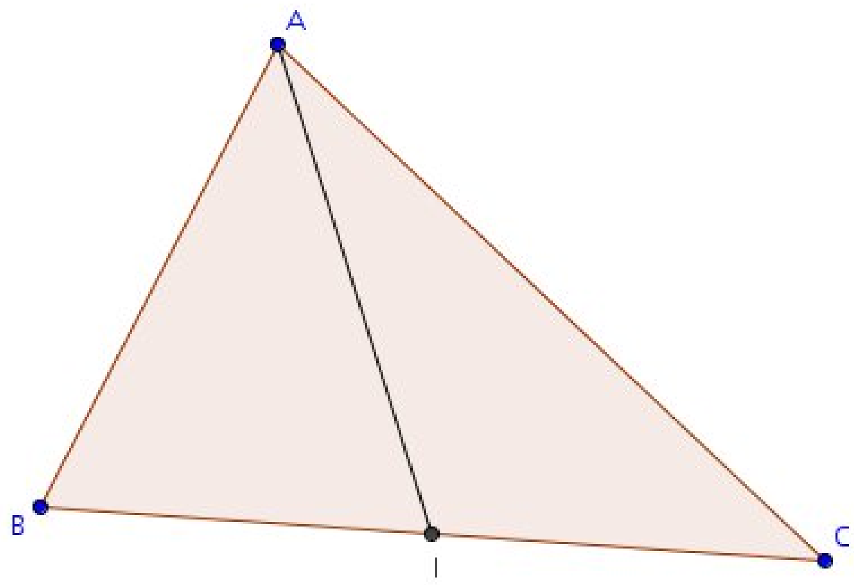
Exercice 37

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$.
Montrer que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - IB^2.$$

Penser à la relation de Chasles.

Illustration

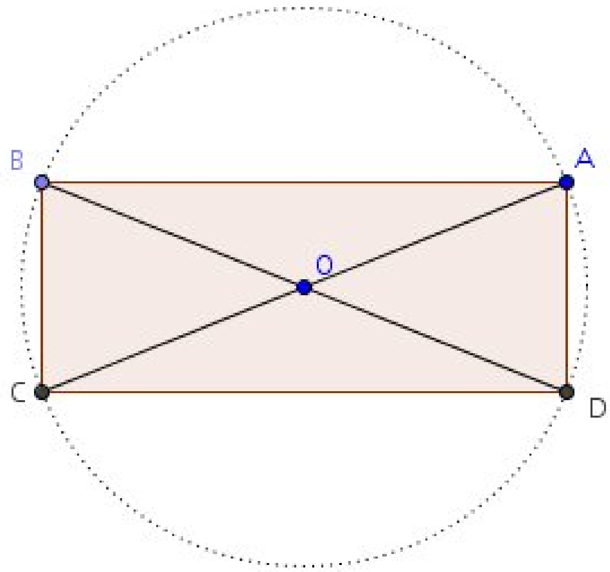


Exercice 38

$ABCD$ est un rectangle.
Montrer que pour tout point M, on a :

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

Illustration



Exercice 39

Soit le triangle ABC équilatéral de côté 4 et k un réel tel que $0 < k < 1$.
On appelle M le point du segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BA}$.
On appelle N le point du segment $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$.

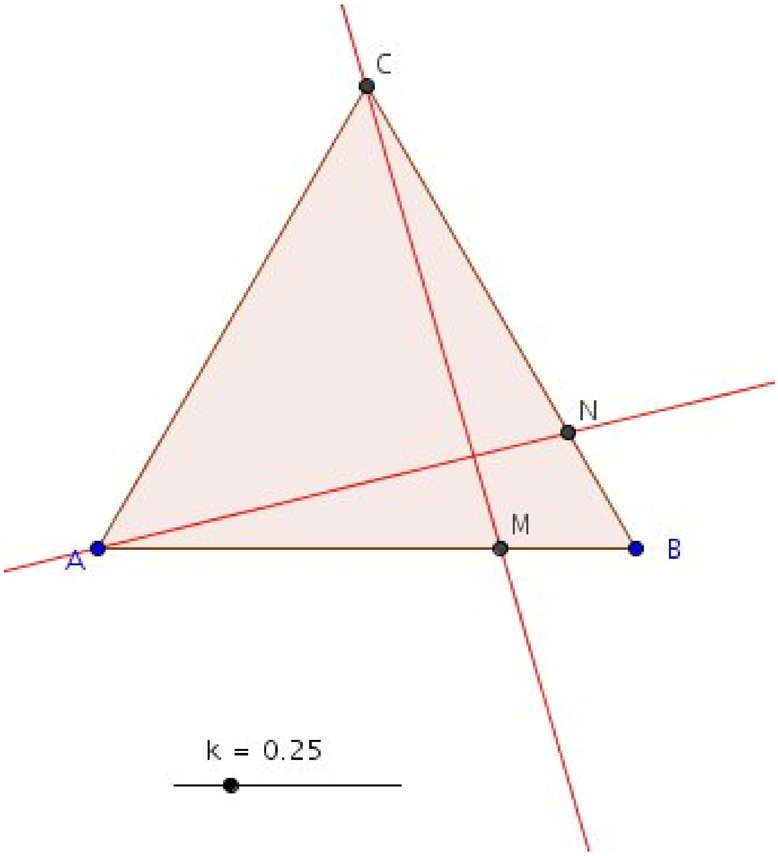
1) Faire une figure en prenant $k = \dfrac{1}{4}$.

2) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{CM}$ en fonctions de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3) Montrer que $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{CM} = 8k^2 - 32k + 8$.

4) En déduire la ou les valeurs de k pour lesquelles les droites (AN) et (CM) sont perpendiculaires.

Illustration



Exercice 40

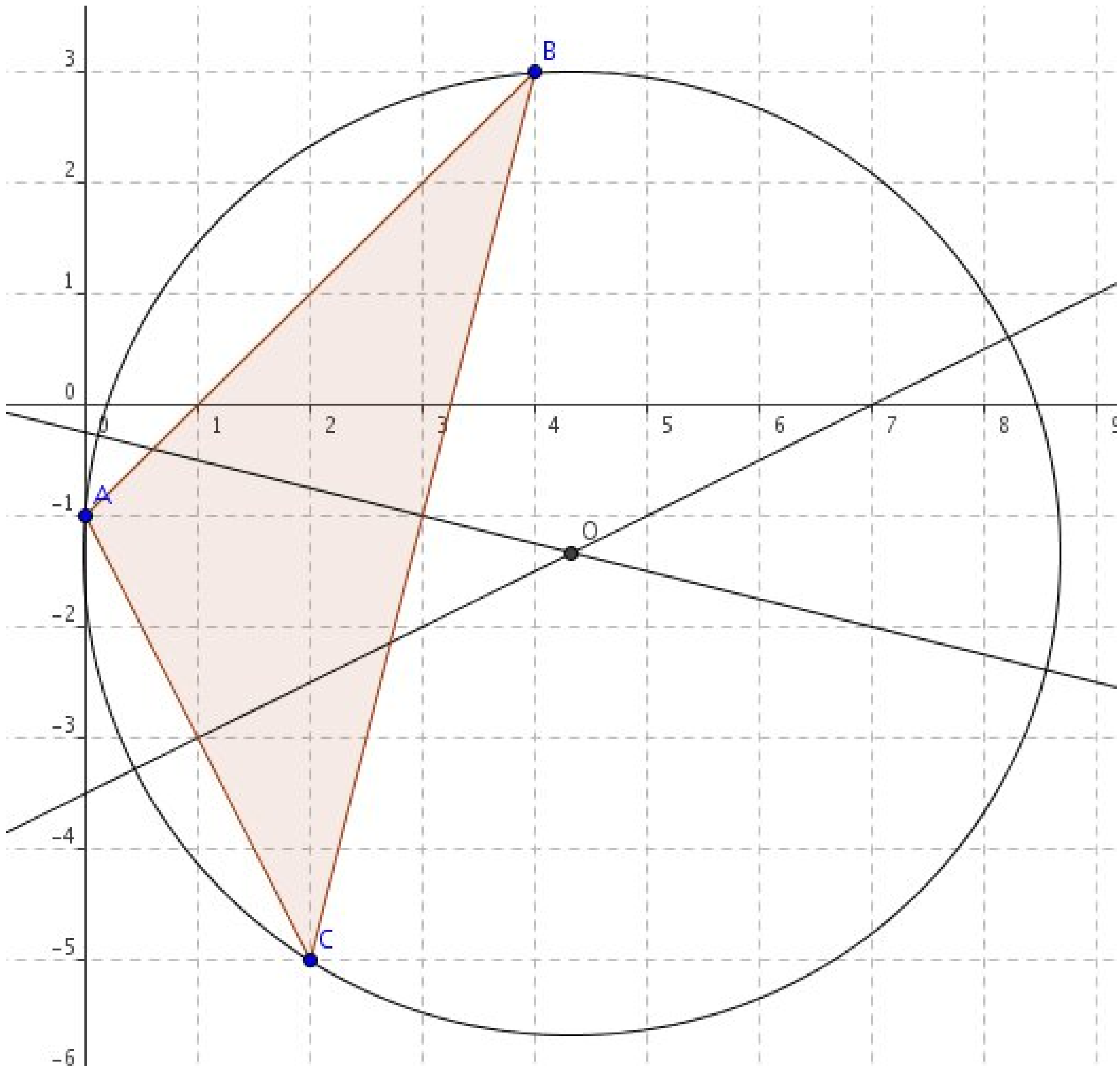
On considère les points $A(0\ ;\ -1)$, $B(4\ ;\ 3)$ et $C(2\ ;\ -5)$.

1) Déterminer les équations des médiatrices des segments $[AC]$ et $[AB]$.

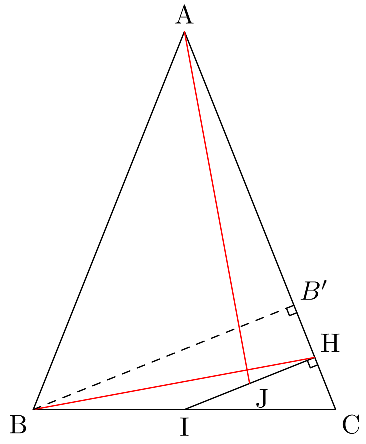
2) En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

3) Déterminer une équation de ce cercle.

Illustration



Exercice 41



ABC est un triangle isocèle en A. I est le milieu de $[BC]$.
H est le projeté orthogonal de I sur $[AC]$ et J le milieu de $[IH]$.

On cherche à établir que les droites (AJ) et (BH) sont orthogonales.

1) Justifier les égalités suivantes :

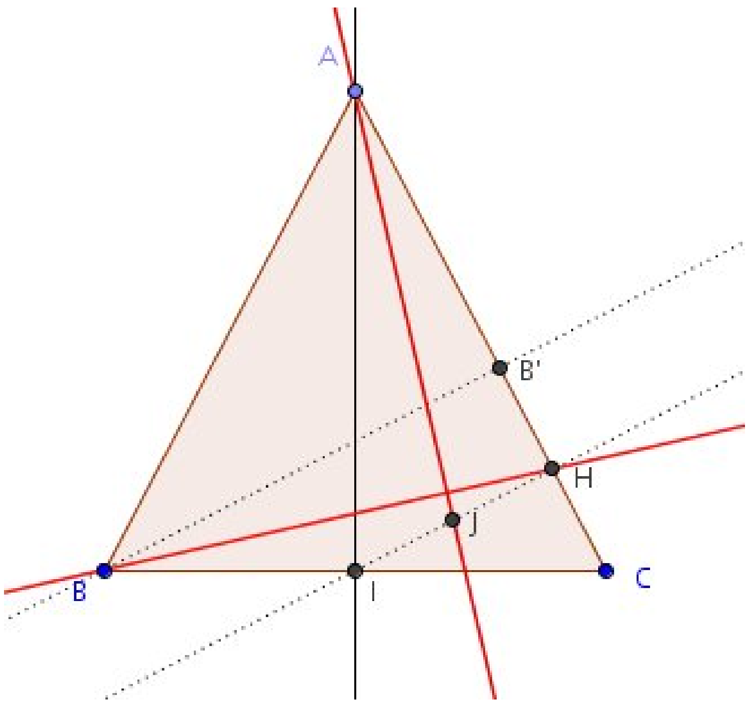
$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AH}$$

2) En faisant appel à B', projeté orthogonal de B sur (AC), montrer que :

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AH}$$

3) Prouver que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AH})$ et utiliser les questions précédentes pour répondre au problème.

Illustration



Exercice 42

1) Montrer que $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ est l'équation d'un cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre Ω et le rayon.

2) **a)** Vérifier que $A(0\ ;\ 3)$ est sur le cercle $(\mathcal{C})$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D})$ tangente à $(\mathcal{C})$ au point A.

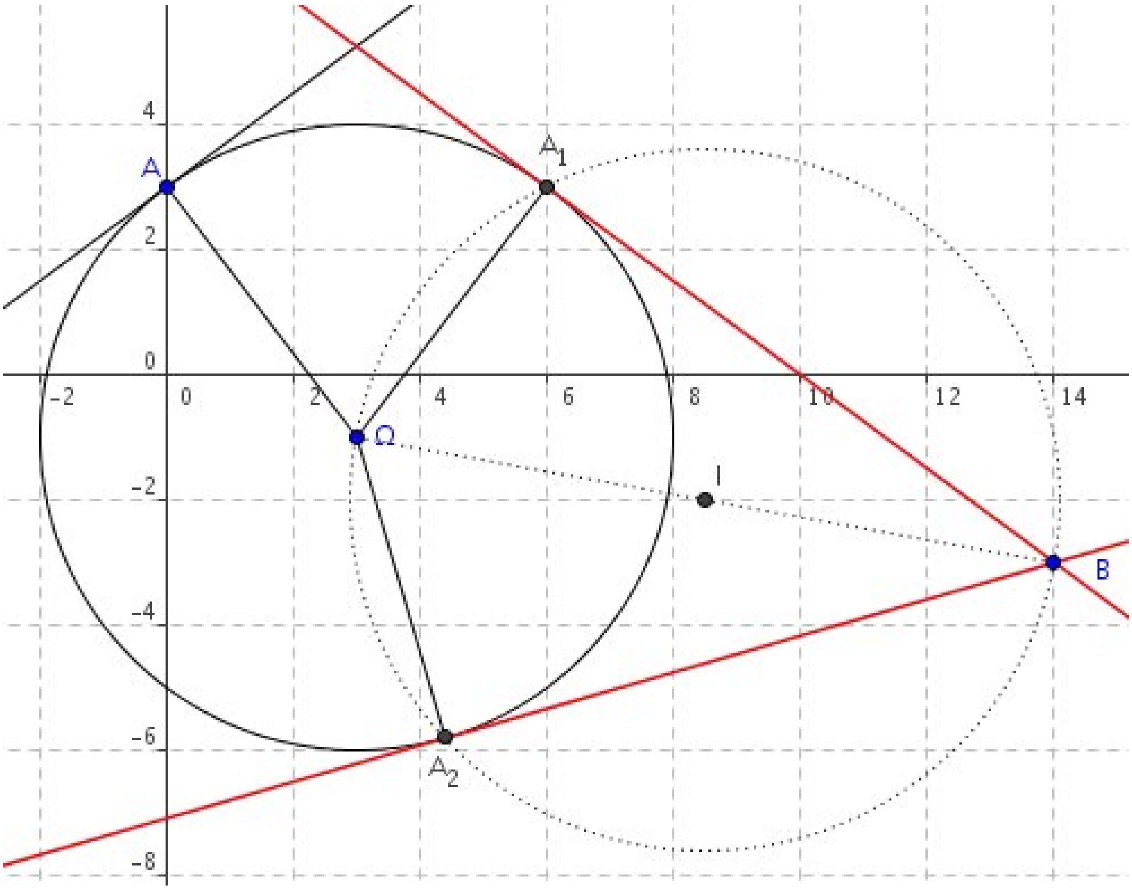
3) Soit B le point de coordonnées $(14\ ;\ -3)$. On se propose de déterminer les équations des droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ passant par B et tangentes à $(\mathcal{C})$ respectivement en A_1 et A_2.

a) Montrer que A_1 et A_2 sont sur le cercle $(\mathcal{C}')$ de diamètre $[B\Omega]$.

b) Déterminer une équation de $(\mathcal{C}')$.

c) Déterminer les coordonnées de A_1 et A_2 puis les équations cherchées.

Illustration



Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50