Terminale S_4 – apprendre à calculer avec les nombres complexes

$$\boxed{i^2 = -1}$$

EXERCICE 1

Effectuer les calculs suivants en utilisant l'égalité $i^2 = -1$, et donner les résultats sous la forme $a + ib$ ou $a + bi$, a et b étant deux nombres réels ($a + ib$ *ou* $a + bi$ *est la forme algébrique du nombre complexe*).

① $(2+3i)+(5-6i)$; ② $(2+3i)-(5-6i)$; ③ $(2+3i)\times(5-6i)$; ④ $(2+3i)^2$;
⑤ $3(-4+i)+2(3+4i)$; ⑥ $3(-4+i)-2(3+4i)$; ⑦ $(-4+i)\times(3+4i)$; ⑧ $(-4+i)^2$.

EXERCICE 2

1. Calculer i^3, i^4, i^5, i^{4n}, i^{4n+1}, i^{4n+2}, i^{4n+3}, n étant un entier naturel.
2. De l'égalité $i^2 = -1$ en déduire la valeur de $\dfrac{1}{i}$.
3. Calculer $(a+ib)^2$, $(a-ib)^2$, $(a+ib)^3$ et $(a-ib)^3$, a et b étant deux nombres réels.
4. Calculer $(2-3i)(2+3i)$. En déduire l'inverse de $(2-3i)$.
5. a. Calculer $(a+ib)(a-ib)$, a et b étant deux nombres réels.
   b. Donner une méthode générale pour calculer l'inverse de $z = a + ib$, a et b étant deux nombres réels non tous les deux nuls.
   c. Appliquer cette méthode pour calculer l'inverse de $z_1 = 2 + 5i$ puis celui de $z_2 = \sqrt{3} - i\sqrt{2}$.
6. a. Calculer $z_3 = \dfrac{1+i}{1-i}$ et $z_4 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}}$.
   b. Calculer $z = \dfrac{a+ib}{a'+ib'}$ avec a, b, a', b' quatre nombres réels et $(a' \,;\, b') \neq (0\,;\,0)$.