Exercices sur les primitives

Exercice 1

F et G sont deux fonctions numériques définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$F(x) = -x^2+3x-\dfrac{4}{x}$ et $G(x) = x(3-x)+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{8}{x}\right)$.

1. Vérifier que F et G ne sont pas égales sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer que F et G sont deux primitives sur $]0\,;\,+\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.
3. Donner une troisième primitive H de f sur $]0\,;\,+\infty[$ différente de F et de G.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $I = \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ définie par $f(x) = \dfrac{10}{(2x-1)^2}$.

1. Justifier que f admet des primitives sur I.
2. Montrer que la fonction $x \longmapsto F(x) = \dfrac{6x-8}{2x-1}$ est une primitive de f sur I.
3. Montrer, par deux méthodes différentes, que la fonction $x \longmapsto G(x) = -\dfrac{5}{2x-1}$ est une autre primitive de f sur I :
   a. en déterminant la dérivée de G sur I ;
   b. en déterminant la fonction $F - G$ sur I.

Pour les exercices 3 à 8, déterminer, dans chaque cas, l'ensemble des primitives de la fonction f sur l'intervalle I.

Exercice 3

$I = \mathbb{R}$.

1. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$.
2. $f(x) = \dfrac{8x^4 - 3x^2 + 1}{5}$.
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(5x^3 - x^2 + x - 1\right)$.
4. $f(x) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{2x^2}{5} + \sqrt{3}$.

Exercice 4

$I =]0\,;\,+\infty[$.

1. $f(x) = 3x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x^2}$.
2. $f(x) = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{5}{x^3} - \dfrac{1}{2x^4}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{\sqrt{x}} - \dfrac{7}{3x^2}\right)$.
4. $f(x) = \dfrac{4x^3 - 5x^2 + \sqrt{2}}{x^2}$.

Exercice 5

$I = \mathbb{R}$.

1. $f(x) = 3\sin(x) + 5\cos(x)$.
2. $f(x) = \dfrac{x}{3} + 4\cos(2x)$.
3. $f(x) = 3\sin\left(4x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 6

$I = \mathbb{R}$.

1. $f(x) = (2x-5)^3$.
2. $f(x) = (2-x)^4$.
3. $f(x) = 5x\left(x^2+1\right)^3$.
4. $f(x) = x\left(9x^2-1\right)^5$.

Exercice 7

$I =]0\,;\,+\infty[$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{3x^2} + \dfrac{1}{(5x+1)^2}$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{5}{2(3x+4)^2}$.
3. $f(x) = \dfrac{5}{x^3} - \dfrac{4}{(2x+1)^3}$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{4x+9}}$.

Exercice 8

$I = \mathbb{R}$.

1. $f(x) = 5\cos(x)\sin^3(x)$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{3}\sin(x)[\cos(x) - 3]^2$.
3. $f(x) = \cos^2(x)$.
4. $f(x) = \sin^2(x)$.

Exercice 9

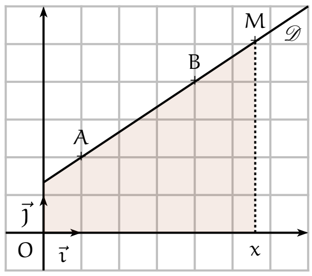
Soit la fonction f définie sur $I =]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+2x-9}{2(x+1)^2}$.

1. Déterminer les deux nombres réels a et b tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = a + \dfrac{b}{(x+1)^2}$.
2. En déduire la primitive de f sur I qui s'annule en 0.

Exercice 10

La demi-droite $\mathscr{D}$ ci-dessous représente une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$. $\mathscr{D}$ passe par les points $A(1\,;\,2)$ et $B(4\,;\,4)$.

Soit M un point de $\mathscr{D}$ d'abscisse $x \geqslant 0$.



1. Déterminer une expression de la fonction f. En déduire la primitive F de f sur $[0\,;\,+\infty[$ qui s'annule en 0.
2. Déterminer l'aire $\mathscr{A}(x)$ du trapèze colorié. Que constate-t-on ?