# Produit scalaire dans l'espace

**Terminale S**
**Lycée Charles PONCET**

Mai 2013

## Table des matières



Le symbole ═ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

*Dans tout le chapitre, l'espace est muni d'une unité de longueur.*

# 1 Produit scalaire dans l'espace

## 1.1 Vecteurs orthogonaux

**Définition 1.1.1**
*Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ non nuls sont* orthogonaux *si ce sont deux vecteurs directeurs de deux droites orthogonales. Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan. On note alors $\vec{u} \perp \vec{u}'$.*

**Définition 1.1.2**
*Un repère de l'espace $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k}\right)$ est orthonormal lorsque les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$, $\vec{\jmath} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \perp \vec{\imath}$, et, $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$.*

**Proposition 1.1.1**
*Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, si le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ alors :*

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.}$$

## 1.2 Définition du produit scalaire

On utilise la même définition que dans le plan puisque deux vecteurs sont toujours coplanaires.

**Définition 1.2.1**
*On appelle* produit scalaire *de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ de l'espace le nombre réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{u}'$, défini par :*

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}'\|^2 - \|\vec{u} - \vec{u}'\|^2\right).$$

☛ Une autre définition possible est d'utiliser la formule $\vec{u} \cdot \vec{u}' = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{u}'\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}'\|^2\right)$.

**Définition 1.2.2**
*Le* carré scalaire *d'un vecteur $\vec{u}$ de l'espace est le nombre réel, noté $\vec{u}^2$, vérifiant $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.*

**Proposition 1.2.1**
*Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.*

➠ Démontrer la proposition 1.2.1.

**Corollaire 1.2.2**
*Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ alors $\vec{u}^2 = x^2 + y^2 + z^2$.*

## 1.3 Formule analytique du produit scalaire

**Théorème 1.3.1**
*Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ont pour coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ alors :*

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy' + zz'.}$$

➠ Démontrer le théorème 1.3.1.

### 1.4 Propriétés du produit scalaire

Les propriétés du produit scalaire dans l'espace qui ne concernent que deux vecteurs sont les mêmes que celles du produit scalaire dans le plan puisque deux vecteurs sont toujours coplanaires.
Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, quel que soit le nombre réel $\alpha$ :

i. $\vec{u} \cdot \vec{u}' = \vec{u}' \cdot \vec{u}$ (*symétrie*) ;
ii. $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{u}' = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{u}') = \alpha\,(\vec{u} \cdot \vec{u}')$ (*bilinéarité*) ;
iii. $(\vec{u} + \vec{u}')^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{u}' + \vec{u}'^2$ donc $(\vec{u} + \vec{u}')^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{u}' + \|\vec{u}'\|^2$ (formule qui peut être utilisée pour la définition du produit scalaire) ;
iv. $(\vec{u} - \vec{u}')^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{u}' + \vec{u}'^2$ donc $(\vec{u} - \vec{u}')^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{u}' + \|\vec{u}'\|^2$ (définition du produit scalaire).

En utilisant la formule analytique du produit scalaire, on démontre que, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ :

v. $\vec{u} \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \vec{u} \cdot \vec{v}_2$ (autre propriété de *bilinéarité*).

➥ Démontrer cette propriété de bilinéarité et en déduire que, quel que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ :

$$\left(\vec{u} + \vec{u}'\right) \cdot \left(\vec{u} - \vec{u}'\right) = \vec{u}^2 - \vec{u}'^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}'\|^2.$$

**Proposition 1.4.1 (orthogonalité de deux vecteurs)**
*Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont* orthogonaux *si et seulement si* $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$.

➥ Démontrer la proposition 1.4.1.

**Corollaire 1.4.2**
*Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ont pour coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ et $(x'\,;\,y'\,;\,z')$ alors, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux si, et seulement si,* $xx' + yy' + zz' = 0$.

### 1.5 Formule du cosinus

**Théorème 1.5.1 (théorème du projeté orthogonal)**
*Pour tous points $A$, $O$ et $A'$ de l'espace, deux à deux distincts :*

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA}' = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH},$$

*$H$ étant le projeté orthogonal de $A'$ sur $(OA)$.*

➥ Démontrer le théorème 1.5.1 en examinant en particulier le cas où $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OA}'$.
Déterminer le signe de $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA}'$ selon que l'angle $\widehat{AOA'}$ est aigu, droit ou obtus.

**Théorème 1.5.2 (formule du cosinus)**
*Quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ :*

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u}' = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}'\| \times \cos(\theta)}$$

*$\theta$ étant l'angle (géométrique) des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.*

➥ Démontrer le théorème 1.5.2 en distinguant trois cas : $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$.

☛ La formule du cosinus permet de déterminer l'angle géométrique de deux vecteurs non nuls : $\cos(\theta) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{u}'}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{u}'\|}$.

# 2 Applications du produit scalaire à la géométrie analytique

*Dans ce paragraphe, l'espace est muni d'un repère orthonormal.*

## 2.1 Vecteur normal à un plan

**Théorème 2.1.1 (et définition)**
*On considère un point* $A$ *de l'espace et* $\vec{n}$ *un vecteur non nul. L'ensemble des points* $M$ *de l'espace tels que* $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$*, c'est-à-dire,* $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$*, est un plan.*
*Réciproquement, le plan* $P$ *passant par le point* $A$ *et de* vecteur normal $\vec{n} \neq \vec{0}$ *est l'ensemble des points* $M$ *de l'espace tels que* $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$*, c'est-à-dire,* $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

☛ Un vecteur normal à un plan est donc un vecteur non nul qui est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan (c'est-à-dire aux deux vecteurs directeurs d'une base d'un plan).

## 2.2 Équation cartésienne d'un plan

⇒ En utilisant le théorème 2.1.1, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ d'un point $M$ pour que ce point $M$ appartienne au plan $P$ passant par le point $A$ de coordonnées $(1\ ;\ -2\ ;\ 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$.
Cette relation entre $x$, $y$ et $z$ est une *équation cartésienne* du plan $P$.

**Théorème 2.2.1**
*Tout plan a une* équation cartésienne *de la forme :*

$$ux + vy + wz + h = 0,$$

$u$*,* $v$*,* $w$ *et* $h$ *étant quatre nombres réels tels que* $(u\ ;\ v\ ;\ w) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$.
*De plus, ce plan a pour vecteur normal* $\vec{n}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.

⇒ Démontrer le théorème 2.2.1.

Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans de coordonnées : $(Oxy)$, $(Oyz)$ et $(Oxz)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan $(ABC)$ avec $A(a\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ b\ ;\ 0)$ et $C(0\ ;\ 0\ ;\ c)$, les nombres $a$ $b$ et $c$ vérifiant $abc \neq 0$.

# 3 Intersection de droites et de plans

## 3.1 Position relative de deux plans

**Théorème 3.1.1**
*Deux plans d'équations* $ux + vy + wz + h = 0$ *et* $u'x + v'y + w'z + h' = 0$ *avec* $(u\ ;\ v\ ;\ w) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ *et* $(u'\ ;\ v'\ ;\ w') \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ *sont parallèles si et seulement si* $(u\ ;\ v\ ;\ w)$ *et* $(u'\ ;\ v'\ ;\ w')$ *sont proportionnels.*

⇒ Démontrer le théorème 3.1.1 en utilisant des vecteurs normaux aux plans.

**Conséquence**
Tout plan parallèle au plan d'équation $ux + vy + wz + h = 0$ avec $(u\ ;\ v\ ;\ w) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ a pour équation $ux + vy + wz + k = 0$.

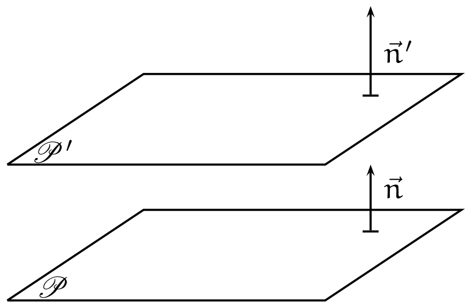
⇒ Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}'$ parallèle au plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x + z + 5 = 0$ qui passe par le point $A(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

**Théorème 3.1.2**
*Deux plans d'équations* $ux+vy+wz+h=0$ *et* $u'x+v'y+w'z+h'=0$ *avec* $(u\,;\,v\,;\,w)\neq(0\,;\,0\,;\,0)$ *et* $(u'\,;\,v'\,;\,w')\neq(0\,;\,0\,;\,0)$ *sont perpendiculaires si et seulement si* $uu'+vv'+ww'=0$.

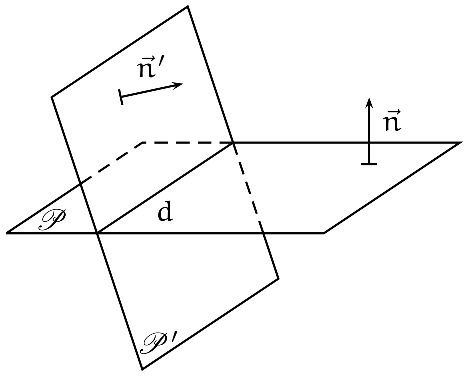
➠ Démontrer le théorème 3.1.2 en utilisant des vecteurs normaux aux plans.
Trouver une équation d'un plan perpendiculaire à $(Oxy)$, à $(Oyz)$, puis à $(Oxz)$.

**Proposition 3.1.3**
*Deux plans* $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{P}'$ *de vecteurs normaux* $\vec{n}\neq\vec{0}$ *et* $\vec{n}'\neq\vec{0}$ *sont, soit sécants selon une droite* $d$ *(si* $\vec{n}$ *et* $\vec{n}'$ *ne sont pas colinéaires), soit parallèles (si* $\vec{n}$ *et* $\vec{n}'$ *sont colinéaires).*

Plans strictement parallèles




Plans sécants




## 3.2 Système de deux équations linéaires

**Définition 3.2.1**
*Lorsque* $(u\,;\,v\,;\,w)\neq(0\,;\,0\,;\,0)$ *et* $(u'\,;\,v'\,;\,w')\neq(0\,;\,0\,;\,0)$ *ne sont pas proportionnels, l'ensemble des points* $M(x\,;\,y\,;\,z)$ *tels que* $\begin{cases} ux+vy+wz+h=0 \\ u'x+v'y+w'z+h'=0 \end{cases}$ *est une droite* $\Delta$ *définie par un* système d'équations linéaires.

☛ La justification de la définition 3.2.1 est une conséquence directe de la propriété 3.1.3.
Comme on suppose que $(u\,;\,v\,;\,w)$ et $(u'\,;\,v'\,;\,w')$ ne sont pas proportionnels alors, nécessairement, $(u\,;\,v\,;\,w)\neq(0\,;\,0\,;\,0)$ et $(u'\,;\,v'\,;\,w')\neq(0\,;\,0\,;\,0)$.

**Exemples**

1. $\Delta$ est la droite définie par $\begin{cases} 3x+2y+z+1=0 \\ 3x-y+5z=0. \end{cases}$

   On cherche une représentation paramétrique de $\Delta$. Pour cela on peut prendre une coordonnée comme paramètre, par exemple poser $z=t$.

   ➠ Calculer $x$ et $y$ en fonction de $t$. En déduire une repésentation paramétrique de $\Delta$, puis un point $A\in\Delta$ et un vecteur directeur de $\Delta$.

2. On considère la droite $(AB)$ avec $A(-1\,;\,2\,;\,4)$ et $B(0\,;\,1\,;\,2)$.

   ➠ Déterminer une représentation paramétrique de $(AB)$.
   Déterminer un système d'équations linéaires de $(AB)$ en éliminant le paramètre $t$ entre les trois équations.

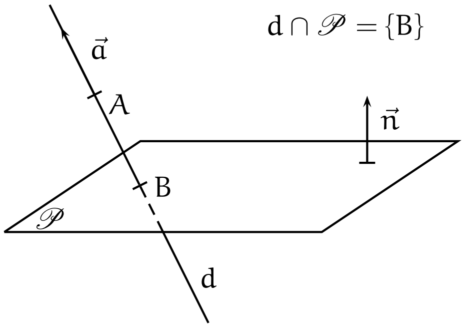
### 3.3 Intersection d'une droite et d'un plan

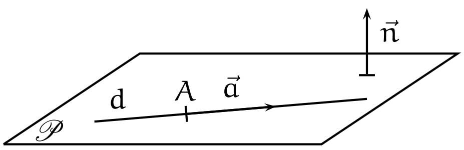
**Définition 3.3.1 (rappel)**
*Une droite est* parallèle *à un plan si elle est parallèle à une droite contenue dans ce plan.*

**Conséquence**
Si $\vec{a} \neq \vec{0}$ de coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta\ ;\ \gamma)$ est un vecteur directeur d'une droite $d$ et si $\vec{n} \neq \vec{0}$ de coordonnées $(u\ ;\ v\ ;\ w)$ est un vecteur normal à un plan $\mathscr{P}$ alors $d \mathbin{/\!/} \mathscr{P}$ si et seulement si $\vec{a} \perp \vec{n}$ donc, si et seulement si $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$.

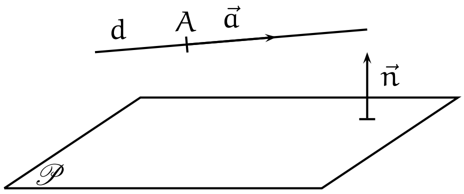
**Proposition 3.3.1**
*Soient $d$ une droite passant par le point $A$ et de vecteur directeur $\vec{a} \neq \vec{0}$ et $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n} \neq \vec{0}$.*

- *Si $\vec{a}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, $d$ et $\mathscr{P}$ sont sécants (en un point).*
- *Si $\vec{a}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, $d$ est parallèle à $\mathscr{P}$ :*
  - *si $A \in \mathscr{P}$, $d$ est incluse dans $\mathscr{P}$ ;*
  - *si $A \notin \mathscr{P}$, $d \cap \mathscr{P} = \varnothing$ ($d$ est strictement parallèle à $\mathscr{P}$).*




$d \cap \mathscr{P} = d$




$d \cap \mathscr{P} = \varnothing$

➡ Déterminer l'intersection de la droite $d$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ avec le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y + z - 2 = 0$.

On pourra faire une figure dans l'espace muni d'un repère orthonormal (en perspective cavalière) en représentant le plan $\mathscr{P}$ par le triangle $ABC$ où $A$, $B$ et $C$ sont les points d'intersection de ce plan avec les trois axes de coordonnées et en traçant la droite $d$.