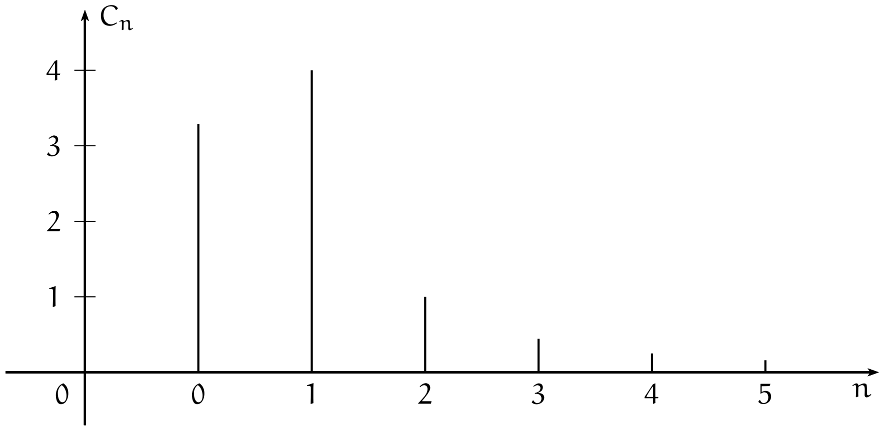
IRIS 2 – devoir à la maison n° 3

À rendre mercredi 5 février 2014

1. Soit n un entier naturel non nul. On pose :
$$A_n = \int_0^{\pi} (t-\pi)^2 \cos(nt)\mathrm{d}t \text{ et } I_n = \int_0^{\pi} (t-\pi)\sin(nt)\mathrm{d}t.$$
Montrer, en intégrant par parties, que $I_n = -\dfrac{\pi}{n}$. On admet que $A_n = \dfrac{2\pi}{n^2}$.

2. On considère un signal périodique modélisé par la fonction $t \longmapsto u(t)$, de période 2π, paire et définie par $u(t) = (t-\pi)^2$ pour $t \in [0\,;\,2\pi]$.
   a. Tracer dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction u, pour t variant entre -2π et 6π (*on pourra utiliser un logiciel de géométrie dynamique comme GeoGebra*).
   b. Donner la valeur du coefficient de FOURIER b_n, pour tout entier $n \geqslant 1$, de la fonction u.
   c. Calculer les coefficients de FOURIER a_0 et a_n, pour tout entier $n \geqslant 1$, de la fonction u.
   d. On admet que la fonction u satisfait aux conditions d'application du théorème de DIRICHLET. Écrire alors le développement en série de FOURIER de la fonction u.

3. On suppose désormais que le signal u est une tension appliquée aux bornes d'un circuit électrique. On désigne par U_{eff} la tension efficace associée à u. Le carré de la tension efficace est donné par la formule :
$$(U_{\text{eff}})^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u^2(t)\mathrm{d}t.$$
   a. Calculer $(U_{\text{eff}})^2$ et en donner une approximation décimale à 10^{-3} près.
   b. Le spectre de fréquence associé à la tension u est la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$n \longmapsto C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$
   où a_n et b_n sont les coefficients de FOURIER de la fonction u. La représentation graphique de ce spectre pour $n \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\}$ est donnée par la figure suivante :



   La formule de PARSEVAL permet d'écrire : $(U_{\text{eff}})^2 = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$.

   Compte tenu du spectre de fréquence, on décide de ne pas prendre en compte les harmoniques d'ordre supérieur ou égal à 5. On obtient alors une approximation du carré de la tension efficace par la formule : $(U_{\text{eff}})_1^2 = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{n=4}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$.

   Donner une approximation décimale à 10^{-3} près de $(U_{\text{eff}})_1^2$.

   La comparaison des approximations décimales de $(U_{\text{eff}})^2$ et de $(U_{\text{eff}})_1^2$ justifie l'abandon des harmoniques d'ordre supérieur ou égal à 5.