Rappels sur le calcul des probabilités

Section de techniciens supérieurs
Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques
Lycée Charles PONCET

Février 2011

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

Définition
Le cardinal *d'un ensemble fini* Ω *à* n *éléments (*n *étant un entier naturel non nul) est* n*, on note* $n = \text{card}(\Omega)$.
De plus $\text{card}(\varnothing) = 0$.

1 Dénombrement – analyse combinatoire

1.1 Liste ordonnée

Définition 1.1.1
n *étant un entier naturel non nul, soit* E *un ensemble fini à* n *éléments. Soit* p *un entier naturel non nul.*

On appelle liste ordonnée de p éléments de E *ou* p-liste d'éléments de E *tout* p*-uplet d'éléments de* E.

Si $E = \{x_1 \ ; \ x_2 \ ; \ \dots \ ; \ x_n\}$*, une* p*-liste de* E *est* $(x_1 \ ; \ x_2 \ ; \ \dots \ ; \ x_p)$ *avec* $x_i \in E$.

☛ Modèle de l'urne : tirage successif et avec remise de p boules d'une urne qui en contient n.

Théorème 1.1.1
Le nombre de p*-listes d'un ensemble fini à* n *éléments est* n^p.

✏ Une urne contient 8 boules. On tire successivement et avec remise 5 boules de l'urne.
Combien y-a-t-il de tirages possibles ?

1.2 Arrangement

Définition 1.2.1
n *étant un entier naturel non nul, soit* E *un ensemble fini à* n *éléments.*
Soit p *un entier naturel tel que* $1 \leqslant p \leqslant n$.
On appelle arrangement *de* p *éléments de* E*, toute* p*-liste d'éléments de* E *deux à deux distincts.*

☛ Modèle de l'urne : tirage successif et sans remise de p boules d'une urne qui en contient n.

Théorème 1.2.1
Le nombre d'arrangements de p *éléments d'un ensemble fini à* n *éléments (avec* $1 \leqslant p \leqslant n$*) est :*

$$A_n^p = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \frac{n\,!}{(n-p)\,!}.$$

✏ Une urne contient 8 boules. On tire successivement et sans remise 5 boules de l'urne.
Combien y-a-t-il de tirages possibles ?

Définition 1.2.2
n *étant un entier naturel non nul, soit* E *un ensemble fini à* n *éléments.*
Un arrangement des n *éléments de* E *est une* permutation.

Théorème 1.2.2
Le nombre de permutations des éléments d'un ensemble fini à n *éléments est* $n\,!$.

✏ Une urne contient 8 boules. On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne.
Combien y-a-t-il de tirages possibles ?

1.3 Combinaison

Définition 1.3.1
n étant un entier naturel, soit E un ensemble fini à n éléments (éventuellement vide).
Soit p un entier naturel tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.

On appelle combinaison *de p éléments de E, toute partie ou sous-ensemble de p éléments de E.*

☛ Modèle de l'urne : tirage simultané de p boules d'une urne qui en contient n.

Théorème 1.3.1
Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble fini à n éléments (avec $0 \leqslant p \leqslant n$) est :

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p\,!} = \frac{n\,!}{p\,!\,(n-p)\,!}.$$

$\binom{n}{p} = C_n^p$ *est un* coefficient binomial.

✏ Une urne contient 8 boules. On tire simultanément 5 boules de l'urne.
Combien y-a-t-il de tirages possibles ?

Théorème 1.3.2 (formules de PASCAL[1])
Si n et p sont deux entiers naturels tels que $0 \leqslant p \leqslant n$ alors :

$$C_n^p = C_p^{n-p} \ \ \textit{et} \ \ C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}.$$

☛ Ce théorème permet de construire un triangle arithmétique appelé *triangle de* PASCAL.

✏ Démontrer le théorème 1.3.2.
Construire le triangle de PASCAL. Pour cela on calculera les première valeurs des coefficients binomiaux (jusqu'à $n = 7$).

Théorème 1.3.3 (formule du binôme de NEWTON[2])
Quels que soient les nombres complexes a et b, quel que soit l'entier naturel $n \neq 0$:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^p a^{n-p} b^p + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

✏ Calculer $(a+b)^7$.

1. Blaise PASCAL (1623 – 1662) mathématicien, physicien et philosophe français. Il est le créateur avec Pierre *Simon* de FERMAT du calcul des probabilités. Ses autres travaux mathématiques ont portés sur la géométrie, le calcul intégral.
2. *sir* Isaac NEWTON (1642 – 1727) physicien, mathématicien et astronome anglais. Il a découvert la loi d'attraction universelle. En mathématiques, il a introduit la notion de dérivée, d'autres travaux mathématiques ont portés sur l'algèbre, la géométrie.

2 Notion de probabilité

2.1 Langage des probabilités

Notations	Langage ensembliste	Langage probabiliste
Ω		
$\omega \in \Omega$		
$A \subset \Omega$		
Ω ($\Omega \subset \Omega$)		
$\varnothing$ ($\varnothing \subset \Omega$)		
$\{\omega\}$		
$A \cup B$		
$A \cap B$		
A et B tels que $A \cap B = \varnothing$		
$\overline{A}$ ($A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$)		

2.2 Probabilité sur un univers fini

Définition 2.2.1

n étant un entier naturel non nul, soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \dots ; \omega_n\}$ un univers fini.
On définit une loi de probabilité *sur Ω si l'on choisit n nombres réels p_1, p_2, …, p_n tels que, pour tout $i \in \{1 ; 2 ; \dots ; n\}$, $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ et $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.*

p_i est la probabilité *de l'évènement élémentaire $\{\omega_i\}$ et on note $p_i = P(\{\omega_i\}) = P(\omega_i)$.*

Pour tout évènement A de Ω, on définit la probabilité *de A, notée $P(A)$, comme la somme des probabilités des évènements élémentaires qui définissent A.*

☛ D'après la définition 2.2.1, la probabilité d'un évènement quelconque est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$.

✏ On lance un dé cubique pipé (*pipé* signifie *truqué*) dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
La probabilité de voir apparaître le numéro k, avec $k \in \{1 ; 2 ; \dots ; 6\}$, est inversement proportionnelle à k.
– définir l'univers et la loi de probabilité associés à ce dé ;
– calculer la probabilité de l'évènement « le numéro de la face est pair » noté A.

2.3 Règles de calculs des probabilités

Théorème 2.3.1
Soit Ω un univers fini muni d'une loi de probabilité P.

1. $P(\Omega) = 1$ *(la probabilité de l'évènement certain est égal à* 1*) ;*
2. $P(\varnothing) = 0$ *(la probabilité de l'évènement impossible est nulle) ;*
3. *quel que soit l'évènement* $A \subset \Omega$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ *;*
4. *si* A *et* B *sont deux évènements incompatibles alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *;*
5. *quels que soient les évènements* A *et* B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
6. *quels que soient les évènements* A *et* B, *si* $A \subset B$ *alors* $P(A) \leqslant P(B)$.

✏ On utilise l'exemple du dé pipé du paragraphe 2.2 :
– définir l'évènement $\overline{A}$ et calculer sa probabilité ;
– calculer la probabilité de l'évènement « le numéro de la face est un nombre premier » noté B ;
– définir et calculer la probabilité de l'évènement $A \cup B$.

2.4 Équiprobabilité

Définition 2.4.1
Soit un univers fini. On dit qu'il y a équiprobabilité *lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité.*

☛ Si Ω est un univers fini avec $\operatorname{card}\Omega = n$, alors pour toute éventualité $\omega \in \Omega$, $P(\omega) = \dfrac{1}{n}$.

Théorème 2.4.1 (formule de LAPLACE [3])
Quand il y a équiprobabilité sur un univers fini Ω, *on a, pour tout évènement* $A \subset \Omega$ *:*

$$P(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card}\Omega} = \frac{\textit{nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\textit{nombre de tous les cas possibles}}.$$

✏ Le Prince de Toscane demanda un jour à GALILÉE : « Pourquoi, lorsqu'on jette trois dés, obtient-on plus souvent la somme 10 que la somme 9 bien que ces deux sommes soient obtenues de six façons différentes ? ».
Déterminer la réponse de GALILÉE (les dés sont supposés non pipés et les faces sont numérotées de 1 à 6).

3 Variable aléatoire

3.1 Définition et loi de probabilité

Définition 3.1.1
Soit Ω *un univers fini muni d'une probabilité* P. *Une* variable aléatoire *est une application* X *de* Ω *sur l'ensemble* $\mathbb{R}$ *des nombres réels :*

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega). \end{aligned}$$

☛ Si $x \in \mathbb{R}$, l'évènement constitué par les éventualités ω telles que $X(\omega) = x$ est noté $\{X = x\}$.
La probabilité de l'évènement $\{X = x\}$ est notée $P(X = x)$.

3. *Marquis* Pierre *Simon* de LAPLACE (Beaumont-en-Auge 1749 – Paris, 1827), astronome, mathématicien, physicien et homme politique français. En mathématiques, il s'est notamment intéressé aux formes quadratiques, aux équations différentielles, aux probabilités.

Définition 3.1.2
Lorsque l'univers Ω est fini, l'image de Ω par une variable aléatoire X est un ensemble fini appelé ensemble des valeurs prises *par X.*
Si la variable aléatoire X prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$ (avec $k \leqslant \text{card}\,\Omega$), affecter les probabilités $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2)$, …, $p_k = P(X = x_k)$ aux valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$, permet de définir une loi de probabilité sur $\{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_k\}$ appelée loi de probabilité *de X.*

☛ Lorsque X prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$, alors $\sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = 1$.

✏ On lance un dé cubique non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 deux fois de suite. On appelle X la variable aléatoire égale à la somme des deux numéros apparus lors de deux lancers.
Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X et la loi de probabilité de X (présenter les résultats sous forme d'un tableau).

3.2 Caractéristiques numériques d'une variable aléatoire

3.2.1 Espérance mathématique

Définition 3.2.1
Si une variable aléatoire X prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$, avec les probabilités $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2)$, …, $p_k = P(X = x_k)$, l'espérance mathématique *de X est le nombre réel $E(X)$ défini par :*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \times p_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \times P(X = x_i).$$

✏ Calculer l'espérance mathématique de l'exemple du paragraphe 3.1 (lancer d'un dé non pipé deux fois de suite).

☛ L'espérance mathématique est la moyenne (au sens des statistiques) des x_i affectés des fréquences p_i, on peut aussi noter l'espérance mathématique de X, $\overline{X}$, comme en statistiques.
Lorsque X désigne le gain d'un joueur, $E(X)$ représente le gain moyen du joueur sur un grand nombre de parties. Le jeu est *équitable* lorsque $E(X) = 0$, *favorable* au joueur lorsque $E(X) > 0$ et *défavorable* lorsque $E(X) < 0$.

Théorème 3.2.1 (linéarité de l'espérance mathématique)
Si X et Y sont deux variables aléatoires définies dans la même situation et si a est un nombre réel alors :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \ \ \textit{et} \ \ E(aX) = aE(X).$$

Corollaire 3.2.2
Si X est une variable aléatoire et si b est un nombre réel alors $E(X+b) = E(X) + b$.

✏ Démontrer le théorème 3.2.1 et le corollaire 3.2.2.

3.2.2 Variance et écart-type

Comme en statistique, on définit la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire.

Définition 3.2.2
Si une variable aléatoire X prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$, avec les probabilités $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2)$, …, $p_k = P(X = x_k)$ et a pour espérance mathématique $E(X) = m$, la variance *de X est le nombre réel $V(X)$ défini par :*

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - m)^2 \times p_i = \sum_{i=1}^{k} (x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i).$$

*L'*écart-type *de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.*

☛ La variance d'une variable aléatoire est un nombre réel positif ou nul.
La variance d'une variable aléatoire X est l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y définie par $Y = (X - m)^2$ avec $m = E(X)$, Y étant associée aux mêmes probabilités que X.

Pour calculer la variance d'un varable aléatoire on utilise le théorème 3.2.3.

Théorème 3.2.3
Si X est une variable aléatoire dont l'espérance mathématique est $E(X)$ alors :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

✏ Démontrer le théorème 3.2.3.

✏ Calculer la variance et l'écart-type de l'exemple du paragraphe 3.1 (lancer d'un dé non pipé deux fois de suite) dont l'espérance mathématique a été calculée au paragraphe 3.2.1.

Théorème 3.2.4
Si X est une variable aléatoire et si a et b sont deux nombres réels alors :

$$V(aX) = a^2V(X) \quad \textit{et} \quad \sigma(aX) = |a|\sigma(X)$$
$$V(X+b) = V(X) \quad \textit{et} \quad \sigma(X+b) = \sigma(X).$$

✏ Démontrer le théorème 3.2.4.

4 Probabilités conditionnelles

4.1 Définition

Définition 4.1.1
Soient Ω un univers fini et A un évènement de probabilité non nulle. Si B est un évènement de Ω, la probabilité conditionnelle de B sachant A *est le nombre :*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

☛ L'ancienne notation utilisée pour désigner la probabilité conditionnelle de B sachant A est $P(B|A)$.
L'application $B \longmapsto P_A(B)$ est une probabilité donc les propriétés des probabilités s'appliquent à cette application.

4.2 Systèmes complets d'évènements

Définition 4.2.1
On appelle système complet d'évènements *(ou* partition*), tout ensemble d'évènements (non vides) de Ω, incomptatibles deux à deux et dont la réunion est Ω.*

$A_1, A_2, \ldots, A_p$ *forment un système complets d'évènements de Ω si et seulement si :*

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = \Omega \ \textit{ et } \ A_i \cap A_j = \varnothing \textit{ lorsque } i \neq j.$$

☛ En particulier si A est un évènement, A et $\overline{A}$ forment un système complet d'évènements de Ω.
La notion de système complet d'évènements correspond à la notion de partition pour la théorie des ensembles.

4.3 Formule des probabilités totales

Théorème 4.3.1
Si $A_1, A_2, \ldots, A_p$ forment un système complets d'évènements de Ω, la probabilité d'un évènement B est :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_p).$$

En particulier :

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}).$$

5 Événements indépendants

5.1 Définition

Définition 5.1.1
Deux évènements A *et* B *sont* indépendants *si et seulement si* $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

☛ Lorsque $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

✏ Démontrer que deux évènements incompatibles et de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants.

Théorème 5.1.1
Si A *et* B *sont deux évènements indépendants, il en de même pour* A *et* $\overline{B}$*, pour* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$.

✏ Démontrer que le théorème 5.1.1.

5.2 Exemple

Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue étudiée et de l'activité sportive choisie.

	Tennis	Équitation	Voile	*Total*
Anglais	45	18	27	
Allemand	33	9	18	
Total				150

On choisit au hasard un stagiaire et on note :
- A l'évènement : « ce stagiaire étudie l'anglais » ;
- $D = \overline{A}$ l'évènement « ce stagiaire étudie l'allemand » ;
- T l'évènement « ce stagiaire pratique le tennis » ;
- V l'évènement « ce stagiaire pratique la voile » ;
- E l'évènement « ce stagiaire pratique l'équitation ».

a. Les évènements D et T sont-ils indépendants ?

b. Les évènements A et V sont-ils indépendants ?

c. Les évènements A et E sont-ils indépendants ?

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.