Contents

Exercices d'entraînement

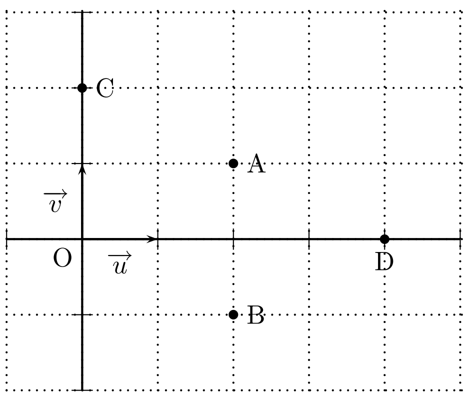
1. Premiers calculs dans $\mathbb{C}$

1-1. Exercice 4 p 275

1. Déterminer i^3, i^4, i^5 puis i^n, suivant les valeurs de n.
2. Calculer $1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^7$.
3. Calculer $1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^n$ suivant les valeurs de n.

1-2. Exercice 5 p 275

1. Donner les affixes des points A, B, C, D et O placés sur la figure ci-dessous.
2. Placer dans le plan les points E, F, G, H et K d'affixes respectives : $1 - i$, $-2 + i$, $2 + 3i$, $-4i$ et -1.



1-3. Exercice 6 p 275

1. Placer les points A, B, C, et D d'affixes respectives $z_A = \dfrac{1}{2} - i$, $z_B = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $z_C = \dfrac{3}{4} + 2i$ et $z_D = \dfrac{11}{4} + \dfrac{1}{2}i$.
2. Déterminer les coordonnées du milieu de I de [AC] et du milieu J de [BD]. Qu'en déduit-on ?

2. Module et argument, forme trigonométrique

2 - 1. Exercice 11 p 275

Placer le point M image de z sachant que :

a. $|z| = 1$ et $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \ (2\pi)$;

b. $|z| = 2$ et $\arg(z) = -\dfrac{5\pi}{6} \ (2\pi)$.

2 - 2. Exercice 14 p 276

Représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a. $|z| = 3$; b. $|z| \leqslant 2$; c. $1 < |z| \leqslant \sqrt{2}$.

2 - 3. Exercice 17 p 276

Déterminer et représenter l'ensemble des M points d'affixe z tels que :

a. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \ (2\pi)$;

b. $\arg(z) = -\dfrac{3\pi}{2} \ (2\pi)$;

c. $\arg(z) = -\dfrac{2\pi}{3} \ (\pi)$.

2 - 4. Exercice 19 p 276

Déterminer le module et un argument de z.

a. $z = -4 + 4\mathrm{i}$

b. $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$

c. $z = -\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$

d. $z = -2\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$.

2 - 5. Exercice 21 p 276

Déterminer le module et un argument de z.

a. $z = \mathrm{i}\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

b. $z = \left(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$;

c. $z = (1 - \mathrm{i})\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)$.

2 - 6. Exercice 22 p 276

Ecrire z sous forme trigonométrique.

a. $z = -4$; $z = -\mathrm{i}\sqrt{3}$; $z = -1 - \mathrm{i}$.

b. $z = \dfrac{\sqrt{3}}{3} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $z = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

2 - 7. Exercice 24 p 276

Ecrire z sous forme trigonométrique.

a. $z = -2(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

b. $z = \dfrac{1}{2}(\sin\alpha - \mathrm{i}\cos\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Inverse, quotient, conjugué

3 - 1. Exercice 28 p 276

Soit $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = -2\mathrm{i}$.
Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres suivants :

1. $z_1 - 2z_2$;
2. $\dfrac{z_1}{z_2}$;
3. $z_1^2 z_2$;
4. $\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$

3 - 2. Exercice 30 p 276

Soit $z = \dfrac{-\sqrt{2}+\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}$.

1. Déterminer la forme trigonométrique de z.
2. Déterminer un argument de z.

3 - 3. Exercice 35 p 277

On considère dans le plan complexe les points M et M′ d'affixes respectives z et z' telles que :

$$z' = z\overline{z} + (1+\mathrm{i})\,z + 3\overline{z} - 2.$$

Soit $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec x, y, x', y' réels.

1. **Des exemples**
   a. Déterminer les points A′ et B′ correspondant aux points A et B d'affixes respectives $a = 2+\mathrm{i}$ et $b = -\mathrm{i}$.
   b. Déterminer l'affixe k du milieu K de [AB].
   En déduire l'affixe k' du point K′ associé à K.
   c. En associant à chaque point M(z) du plan le point M′(z'), on définit une application f.
   Conserve-t-elle le milieu ?
2. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
3. Déterminer l'ensemble E des points de M tels que z' soit réel.
4. Déterminer l'ensemble des points de M tels que z' soit imaginaire pur.

4. Equation dans $\mathbb{C}$

4 - 1. Exercice 39 p 277

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations proposées.

a. $\mathrm{i}z + 2(z - \mathrm{i}) = 0$; b. $(4+\mathrm{i})\,z = 3 - z$.

4 - 2. Exercice 40 p 277

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations proposées.

1. $(z+2\mathrm{i})(2z-3+\mathrm{i}) = 0$;
2. $(\mathrm{i}z - 3 + \mathrm{i})((1-\mathrm{i})\,z + 4 + 3\mathrm{i}) = 0$.

5. Forme exponentielle

5 - 1. Exercice 52 p 278

Sans calcul, placer les points A, B, C et D d'affixes respectives :

a. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$; b. $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$; c. $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$; d. $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

5 - 2. Exercice 53 p 278

Lire graphiquement la forme exponentielle de 3i ; -2, $-5i$, 8.

5 - 3. Exercice 54 p 278

1. Ecrire sous forme exponentielle $-\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$.
2. En déduire la forme exponentielle de $-\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$, $\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$ et $\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$.

5 - 4. Exercice 57 p 278

1. En utilisant la notation exponentielle, déterminer le module et un argument de $z_1 = \dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

5 - 5. Exercice 61 p 278

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout θ réel, $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

6. Affixe d'un vecteur

6 - 1. Exercice 70 p 279

Les points A, B et C ont pour abscisses respectives 3+i, $\dfrac{4-\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $2 - \mathrm{i}\sqrt{2}$.
Démontrer que A, B et C sont situés sur un même cercle de centre I d'affixe 2 dont on précisera le rayon.

6 - 2. Exercice 71 p 279

Les points A, B et C ont pour abscisses respectives 2, 4-4i et 4+i.
Démontrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculeires.

6 - 3. Exercice 72 p 279

Les points E, F et G ont pour abscisses respectives

$$z_E = -3 + \mathrm{i};\ z_F = 4,5 + 2,5\mathrm{i};\ z_G = 2 + 2\mathrm{i}$$

Donner une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG})$.
Que peut-on en conclure pour les points E, F et G?

6 - 4. Exercice 73 p 279

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

a $|z-3| = 4$;

b $|z+1-2\mathrm{i}| = 5$;

c $|z-1+2\mathrm{i}| = |z-1|$;

d $|z-2-\mathrm{i}| = |z|$.

6 - 5. Exercice 74 p 279

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

a $|\bar{z}-1+3\mathrm{i}| = |1-z|$;

b $|\mathrm{i}z| = |1-z|$;

c $|z+4-2\mathrm{i}| = |2-\mathrm{i}-\bar{z}|$.

6 - 6. Exercice 75 p 279

Soit A le point d'affixe $z_A = -1$. Pour tout réel θ, on considère le point B d'affixe $z_B = -1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et le point C d'affixe $z_C = -1 + {z_B}^2$.

1. Déterminer la nature du nombre $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
2. Interpréter géométriquement.

7. Construction de points

7 - 1. Exercice 76 p 279

Soit A le point d'affixe $a = -2$ et le point B d'affixe $b = 1$. A tout point M d'affixe $z \neq -2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z}{z+2}$.
On considère les points D, E et F d'affixe $d = 4$, $e = \mathrm{i}$ et $f = -2 + 3\mathrm{i}$.

1. Ecrire sous forme algébrique les affixes d', e' et f' des points D', E' et F' associés aux points D, E et F.
2. (a) Exprimer $z' - 1$ en fonction de z.
   (b) Quelle relation y-a-t-il entre les modules et arguments de $z' - 1$ et de $z + 2$.
   (c) Interpréter géométriquement ces relations à l'aide des points A, B, M et M'.
   (d) Vérifier les résultats obtenus de la question **2c**, avec les points D et D', puis avec les points E et E'.

7 - 2. Exercice 77 p 279

Soit A le point d'affixe $1 + 2\mathrm{i}$ et le point B d'affixe $-2 + \mathrm{i}$. A tout point M d'affixe z, autre que B, on associe le point M' d'affixe $Z' = \dfrac{z-1-2\mathrm{i}}{z+2-\mathrm{i}}$.

1. Donner une signification géométrique de $|Z'|$ et $\arg(Z')$ à l'aide des points M, A et B.
2. En deduire sans calcul les ensembles suivants :
   (a) E, ensemble des points M tels que $|Z'| = 1$;
   (b) F, ensemble des points M tels que Z' est un réel strictement positif ;
   (c) G, ensemble des points M tels que Z' est un imaginaire pur non nul.

7 - 3. Exercice 78 p 279

Soit A le point d'affixe 2 et le point B d'affixe -2. A tout point M d'affixe z, autre que A, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{2z-4}{\bar{z}-2}$.

1. (a) Démontrer que $|z'| = 2$.
   (b) En déduire une indication sur la position de M'.
2. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z ($z \neq 2$ tels que $M' = B$.
3. Soit M un point n'appartenant pas à E et distinct de A et de B.
   (a) Démontrer que $\dfrac{z-2}{z'+2}$ est un réel.
   (b) Interpréter géométriquement ce résultat.
   (c) Donner une construction de M'.

8. Configuration, transformations

8 - 1. Exercice 86 p 281

Déterminer dans chacun des cas suivants, la transformation géométrique qui au point M d'affixe z associe le point M' tel que :

a $z' + z = 0$;

b $z' - z = 2\mathrm{i}$;

c $z' - \mathrm{i}z$;

d $z' + \dfrac{1}{2}z = 0$.

8 - 2. Exercice 87 p 281

On considère les nombres complexes z_1, z_2 et z_3, tels que $z_1 = (1-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$; $z_2 = \dfrac{2+6\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$; $z_3 = \dfrac{-4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.
On désigne par M_1, M_2 et M_3 les images respectives de z_1, z_2 et z_3 dans le plan complexe.

1. Calculer les parties réelles et imaginaires de z_1, z_2 et z_3. Placer M_1, M_2 et M_3.
2. Calculer $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$; en déduire la nature du triangle $M_1M_2M_3$.
3. Déterminer l'affixe du point M_4 tel que le quadrilatère $M_2M_1M_3M_4$ soit un carré.

8 - 3. Exercice 89 p 281

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.(unité graphique 2cm)
On considère les points A et Ω d'affixes respectives :

$$a = -1 + \sqrt{3} + i \quad \text{et} \quad \omega = -1 + 2i.$$

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

1. Placer sur une figure (très proprement!) les points A et Ω, l'image B du point A par r, l'image C du point B par r et l'image D du point A par h.
2. On note b, c et d les affixes respectives des points B, C et D.

   Le tableau ci-dessous contient une suite de 18 affirmations, dont chacune débute dans la première colonne et s'achève sur la même ligne colonne 2, colonne 3 ou colonne 4.

   Vous devez vous prononcer sur chacune de ces affirmations. Pour cela vous devez recopier le tableau ci-dessous, en faisant figurer dans chacune des cases la mention VRAI ou FAUX .

   Aucun calcul n'est nécessaire, vous avez juste besoin de lire le dessin... et de réfléchir un tout petit peu.

1)	$\lvert a-\omega\rvert =$	2	4	$\sqrt{3}-i$
2)	$\arg(a-\omega) =$	$-\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{47\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{6}$

1)			
2)			
3)			
4)			
5)			
6)			

3)	$\left(\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{\Omega C}\right) =$	$\arg(\omega-i)$	$-\left(\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{C\Omega}\right)$	$\dfrac{2\pi}{3}$
4)	$\omega =$	$\dfrac{1}{3}(a+b+c)$	$a+b+c$	$b-2i$

5)	$\dfrac{b-d}{a-d} =$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$
6)	Le point D est	l'image de Ω par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$	l'image de Ω par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{3}{2}$	l'image de Ω par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$

Exercices d'approfondissement

9. Différentes formes

9 - 1. Exercice 111 p 284

Soit $z = \dfrac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ avec $\theta \in]-\pi;\pi[$.

1. Montrer que z est un imaginaire pur.
2. Exprimer $|z|$ en fonction de $\dfrac{\theta}{2}$.

9 - 2. Exercice 112 p 284

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré 0,5 point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.

On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :

$$\text{A} : 2\sqrt{2} \qquad B : 2\sqrt{2}-2\mathrm{i}\sqrt{2} \qquad \text{C} : 2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(2-\sqrt{2}\right) \qquad D : 2\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}$$

2. z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

$$\text{A} : \quad 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \qquad \text{B} : \quad 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \qquad \text{C} : \quad 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} \qquad \text{D} : \quad 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$$

3. z s'écrit sous forme exponentielle :

$$\text{A} : \quad 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}} \qquad \text{B} : \quad 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} \qquad \text{C} : \quad 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}} \qquad \text{D} : \quad 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}$$

4. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

$$\text{A} : \quad \frac{7\pi}{8} \qquad \text{B} : \quad \frac{5\pi}{8} \qquad \text{C} : \quad \frac{3\pi}{8} \qquad \text{D} : \quad \frac{\pi}{8}$$

9 - 3. Exercice 114 p 284

Soit $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1-\mathrm{i}$

1. Ecrire sous forme trigonométrique, z_1, z_2, $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.
2. En déduire que :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3. On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x=2$$

   a. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.
   b. Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

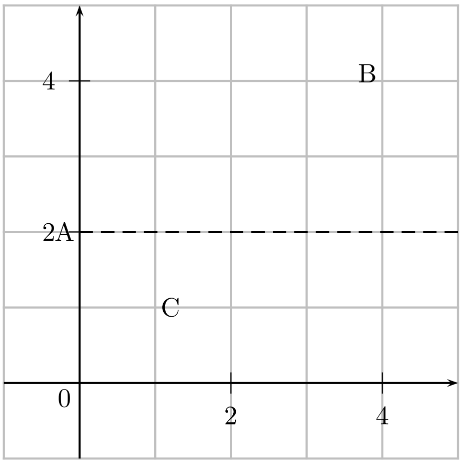
10. Configurations

10 - 1. Exercice 121 p 285

Dans le plan complexe, les points A, B et C ont respectivement pour affixes :

$$a=2\mathrm{i},b=2\mathrm{i}+4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\quad\text{et } c=\frac{2}{3}(\sqrt{3}+2\mathrm{i})$$

1. Recopier et compléter la figure:



2. Vérifier que les points O, C et B sont alignés.
3. Déterminer $\dfrac{CO}{CB}$ et $\dfrac{AQ}{AB}$.
4. Comparer $\arg\dfrac{a-c}{a}$ et $\arg\dfrac{b-a}{c-a}$.
   Quelle interprétation géométrique peut-on donner de cette propriété?
   Quelle propriété de la bissectrice intérieure d'un angle retrouve-t-on ici ?

11. Ensemble de points

11 - 1. Exercice 132 p 287

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\overrightarrow{\mathrm{u}},\overrightarrow{\mathrm{v}})$ (unité graphique : 2 cm). A tout nombre complexe distinct de 4, on associe le nombre $Z=\dfrac{\mathrm{i}z-4}{z-4}$.
On note A le point d'affixe 4 et on considère l'ensemble C des points M du plan, distincts de A et d'affixe z tels que Z soit réel.
On se propose de déterminer et de construire cet ensemble C par deux méthodes différentes.

1. **Méthode algébrique**
   (a) On pose $z=x+\mathrm{i}y$ et $Z=X+\mathrm{i}Y$ avec x, y, X et Y réels.
   Exprimer X et Y en fonction de x et y.
   (b) Ecrire une équation cartesienne de cet ensemble. Reconnaître la nature de C et caractériser cet ensemble.
   (c) Construire C.
2. **Méthode géométrique**
   On considère le point d'affixe $-4\mathrm{i}$.
   (a) Vérifier que $\dfrac{\mathrm{i}z-4}{z-4}$ est réel si et seulement si le nombre $\dfrac{z+4\mathrm{i}}{z-4}$ est imaginaire pur (on pourra remarquer que $\mathrm{i}z-4=\mathrm{i}(z+4\mathrm{i})$).
   (b) Quelles sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$?
   (c) En interprétant géomériquement la condition ci-dessus, établir que M appartient à C si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.
   En déduire la nature de C et caractériser cet ensemble.

12. Problèmes

12 - 1. Exercice 142 p 290

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$(unité graphique : 2cm).
On considère les points A, B et C d'abscisses respectives $z_{\mathrm{A}} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{B}} = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{C}} = 2$.

1. Placer ces points sur un dessin.
2. (a) Vérifier que $\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   (b) En déduire la nature du triangle ABC.
   (c) Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC. Tracer le cercle Γ_1.
3. (a) Etablir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient $2(z + \overline{z}) + z\overline{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2. Préciser son rayon.
   (b) Construire Γ_2.
   (c) Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2.
4. On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   (a) Quelles sont les images des points A et B par la rotation r_1 ? Construire l'image C_1 du point C par la rotation r_1 puis calculer son affixe.
   (b) Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1.
5. Soit r une rotation. Pour tout point M d'affixe z, on note M' l'image de M par r et z' son affixe.
   On posera $z' = az + b$, avec a et b des nombres complexes tels que $|a| = 1$ et $a \neq 1$.
   On suppose que r transforme le cercle Γ_2 en le cercle Γ_1.
   (a) Quelle est l'image du point Ω par r ? En déduire une relation entre a et b.
   (b) Déterminer en fonction de a l'affixe du point $r(\mathrm{C})$, image de C par r ; en déduire que le point $r(\mathrm{C})$ appartient à un cercle fixe que l'on définira.
   Vérifier que ce cercle passe par C_1.

12 - 2. Exercice 143 p 290

On considère le cercle de centre O et de rayon 1. A partir d'un point A_0 de C, on construit le point A_1 tel que le triangle $\mathrm{OA}_0\mathrm{A}_1$ soit direct, isocèle et rectangle en A_1. En procédant de la même manière, on construit les points A_2, A_3,...
On définit ainsi une suite de points (A_n) où $n \in \mathbb{N}$; pour chaque n, l'affixe du point A_n est notée z_n.

Partie A. Etude de A_1

1. Montrer que l'affixe de A_1 est $z_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_0$.
2. On rappelle que le point A_0 appartient au cercle C et on désigne par θ une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA_0}\right)$.
   En déduire l'écriture sous forme exponentielle de z_0.
3. Déterminer l'écriture sous forme exponentielle de $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$. En déduire celle de z_1.

Partie B. Une spirale

Plus généralement, on peut montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_n.$$

1. (a) En déduire $|z_{n+1}|$ en fonction du module de $|z_n|$.
   (b) Préciser la nature de la suite $(|z_n|)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|z_n| = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.
   (c) A partir de quel entier n_0, tous les points $\mathrm{A}_n$appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,001.
2. On s'intéresse désormais à la longueur L_n de la ligne brisée $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \ldots \mathrm{A}_n$.
   (a) Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}$.
   (b) Calculer, en fonction de n, la longueur
   $$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$$
   (c) En déduire la limite de L_n quand n tend vers l'infini et interpréter géométriquement le résultat.

12 - 3. Exercice 144 p 291

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On note C le cercle de centre O et de rayon $R > 0$ et A le point de C d'affixe R. Etant donné un entier $n \geqslant 2$, on note r la rotation de centre O d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$.
On considère la suite des points $(M_k)_{k \geqslant 2}$ de C définie par la relation de récurrence $M_{k+1} = r(M_k)$ et la condition initiale $M_0 = A$. On note z_k l'affixe de M_k.

1. (a) Pour tout $k \geqslant 0$, exprimer z_{k+1} en fonction de z_k.

   (b) Démontrer que $z_k = Re^{i\frac{2k\pi}{n}}$, pour tout $k \geqslant 0$ (on fera un raisonnement par récurrence sur k pour montrer que $\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$).

   (c) Comparer Mn et M_0.

   (d) Faire la figure lorsque $n = 16$ (on prendra $R = 4$ cm).

2. (a) Prouver que, pour tout $k \geqslant 0$,

$$M_k M_{k+1} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

   (b) On note $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \ldots + M_{n-1}M_n$ le périmètre du polygone régulier $(M_0M_1M_2 \ldots M_n)$.
   Déterminer la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement le résultat ainsi obtenu.