Exercice 144 page 291

• Problème

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note C le cercle de centre O et de rayon $R > 0$ et A le point de C d'affixe R. Etant donné un entier $n \geqslant 2$, on note r la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{n}$. On considère la suite des points $(M_k)_{k\geqslant 2}$ de C définie par la relation de récurrence $M_{k+1} = r(M_k)$ et la condition initiale $M_0 = A$. On note z_k l'affixe de M_k.

1. a. *Pour tout $k \geqslant 0$, exprimer z_{k+1} en fonction de z_k.*
z_{k+1} est l'affixe du point M_{k+1} image de M_k d'affixe z_k par la rotation r, de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$. On en déduit :

$$\boxed{z_{k+1} = z_k e^{\frac{2i\pi}{n}}.}$$

b. *Démontrer que $z_k = Re^{i\frac{2k\pi}{n}}$, pour tout $k \geqslant 0$ (on fera un raisonnement par récurrence sur k pour montrer que $\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$).*
Soit n fixé et soit, P_k : $\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

Montrons que P_k est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

• **Initialisation :** $\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^0 = 1 = e^{i\frac{2\pi\times 0}{n}} =$, donc P_0 est vraie.

• **Hérédité :** On suppose P_k vraie, alors :

$$\begin{aligned}\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{k+1} &= \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k \times e^{i\frac{2\pi}{n}}\\ &= e^{i\frac{2k\pi}{n}} \times e^{i\frac{2\pi}{n}}\\ &= e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}}.\end{aligned}$$

Donc P_{k+1} est vraie.

• **Conclusion :** P_0 est vraie et pour tout k entier naturel, si P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie, donc : $\forall k \in \mathbb{N}$, P_k est vraie.

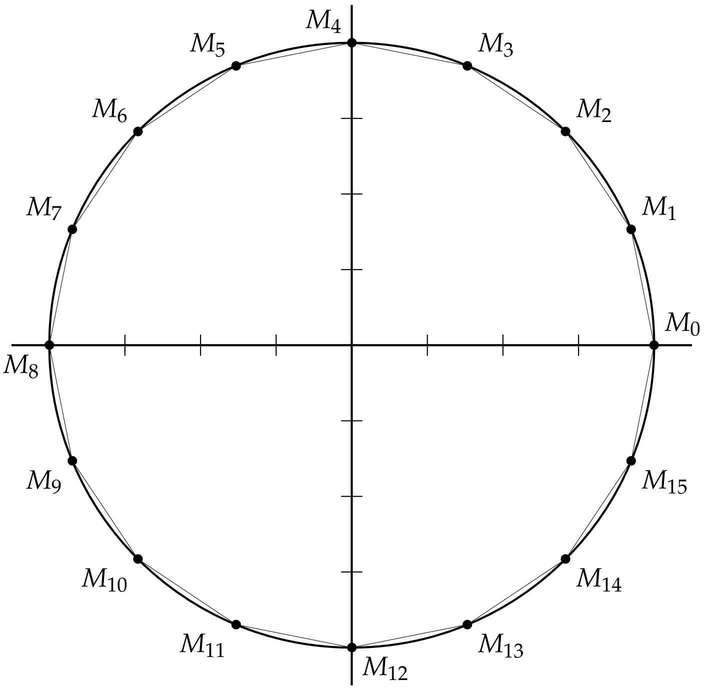
> Remarque :
>
> On peut démontrer de la même façon que :
>
> $$\forall a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N} : \left(e^{ia}\right)^n = e^{ian}$$

Donc,

$$\begin{aligned} z_k &= z_{k-1}e^{i\frac{2\pi}{n}} = z_{k-2}e^{i\frac{2\pi}{n}} \times e^{i\frac{2\pi}{n}} = z_{k-2}\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^2\\ &= \ldots = z_0\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \boxed{Re^{i\frac{2k\pi}{n}}.}\end{aligned}$$

c. *Comparer M_n et M_0.*
On a: $z_n = Re^{i\frac{2n\pi}{n}} = Re^{2i\pi} = R = z_0$.
$\boxed{\text{Les points } M_0 \text{ et } M_n \text{ sont confondus.}}$

d. *Faire la figure lorsque $n = 16$ (on prendra $R = 4$ cm).*



2. a. *Prouver que, pour tout $k \geqslant 0$, $M_kM_{k+1} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.*

$$\begin{aligned} M_kM_{k+1} &= |z_{k+1} - z_k|\\ &= \left|z_k e^{\frac{2i\pi}{n}} - z_k\right|\\ &= \left|z_k\left(e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1\right)\right|\\ &= |z_k|\left|e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1\right|\\ &= R \times \left|e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1\right|\\ &= |R| \times \left|\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 1 + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right|\\ &= R\sqrt{\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 1\right]^2 + \left[\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^2}\\ &= R\sqrt{\cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + 1 + \sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\\ &= R\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\\ &= R\sqrt{2\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]}\\ &= R\sqrt{2 \times 2\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}\\ &= 2R\left|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right|\end{aligned}$$

Mais : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < \frac{1}{n} \leqslant 1 \Longrightarrow 0 < \frac{\pi}{n} \leqslant \pi$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \geqslant 0$

et : $\left|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right| = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Finalement : $\boxed{\forall k \geqslant 0, M_kM_{k+1} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).}$

b. *On note $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \ldots + M_{n-1}M_n$ le périmètre* *du polygone régulier $(M_0M_1M_2\ldots M_n)$. Déterminer la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement le résultat ainsi obtenu.*

On a : $\begin{array}{rcl} L_n & = & M_0M_1 + M_1M_2 + \ldots + M_{n-1}M_n \\ & = & 2R\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) + 2R\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) + \ldots + 2R\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \\ & = & n \times 2R\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) = 2Rn\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \end{array}$

Il s'agit de déterminer la limite de la suite L_n.

Posons $f(x) = 2Rx\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) = 2R\pi\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{\dfrac{\pi}{x}}$, donc :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi}{x} & = & 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} & = & 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{\dfrac{\pi}{x}} = 1.$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2\pi R$.

Puisque $L_n = f(n)$, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 2\pi R.}$

Geométriquement :

le périmètre du polygone $(M_0M_1M_2\ldots M_n)$ tend vers le préimètre du cercle lorsque n tend vers $+\infty$.