Exercice 1

les complexes ... un bon résumé !

– Partie A –

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante : (E) $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$.

1. *Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-2)(az^2+bz+c) = 0$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.*

On a $2^3 + 2 \times 2^2 - 16 = 0$ donc 2 est solution de (E).
Soit $P(z) = az^2 + bz + c$.
$P(2) = 0$ donc $P(z) = (z-2)\,Q(z)$ où Q est un polynôme du second degré.
Par division ou identification on obtient :
$P(z) = (z-2)\left(z^2+4z+8\right)$
Ainsi $\boxed{\text{(E) } (z-2)\left(z^2+4z+8\right) = 0.}$

2. *En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.*

On a donc (E) $\iff$ $z-2=0$ ou $z^2+4z+8=0$.

Résolution de $z^2 + 4z + 8 = 0$

On a: $\Delta = 4^2 - 4 \times 8 = -16 = (4\mathrm{i})^2$

$$\begin{aligned} \text{ainsi } z_1 &= \frac{-4+4\mathrm{i}}{2} \\ &= -2+2\mathrm{i} \\ &= 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } z_2 &= \overline{z_1} \\ &= -2-2\mathrm{i} \\ &= 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{S = \{2\ ;\ -2+2\mathrm{i}\ ;\ -2-2\mathrm{i}\}}$

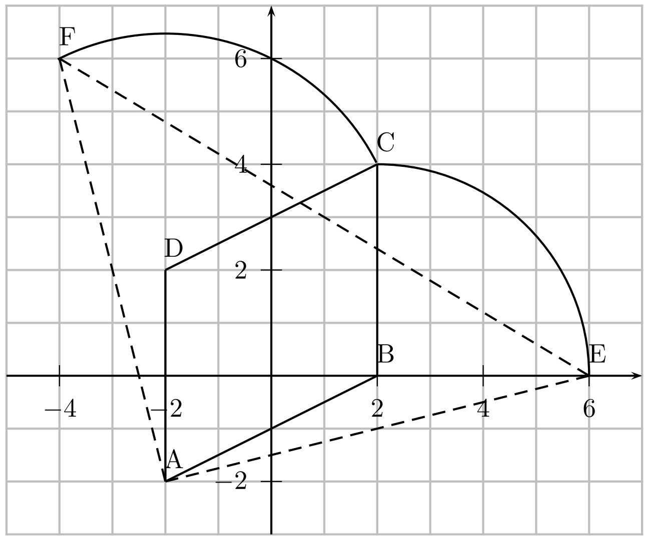
ou sous forme exponentielle :

$$\boxed{S = \left\{2\ ;\ 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}\ ;\ 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{-3\mathrm{i}\pi}{4}}\right\}}$$

– Partie B –

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. *Placer les points A, B et D d'affixes respectives $z_A = -2-2i$, $z_B = 2$ et $z_D = -2+2i$.*



2. *Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.*

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et :
$z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{BC}}$
d'où $z_D - z_A = z_c - z_B$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } z_C &= z_D - z_A + z_B \\ &= -2+2\mathrm{i} - (-2-2\mathrm{i}) + 2 \\ &= 2+4\mathrm{i}. \end{aligned}$$

3. *Soit E l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Soit F l'image de C par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.*

a. *Calculer les affixes des points E et F, notées z_E et z_F.*

La rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe : $z' - z_B = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}(z - z_B)$

$$\begin{aligned} \text{d'où } z' &= -\mathrm{i}z + z_B\,(1+\mathrm{i}) \\ &= -\mathrm{i}z + 2 + 2\mathrm{i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } z_E &= -\mathrm{i}z_C + 2 + 2\mathrm{i} \\ &= -\mathrm{i}\,(2+4\mathrm{i}) + 2 + 2\mathrm{i} \\ &= 6. \end{aligned}$$

La rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe :
$z' - z_D = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}\,(z - z_D)$

$$\begin{aligned} \text{d'où } z' &= \mathrm{i}z + z_D\,(1-\mathrm{i}) \\ &= \mathrm{i}z + (-2+2\mathrm{i})\,(1-\mathrm{i}) \\ &= \mathrm{i}z + 4\mathrm{i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } z_F &= -\mathrm{i}z_C + 4\mathrm{i} \\ &= \mathrm{i}\,(2+4\mathrm{i}) + 4\mathrm{i} \\ &= -4+6\mathrm{i}. \end{aligned}$$

b. *Placer les points E et F.*

4. a. *Vérifier que : $\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$.*

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{z_{\mathrm{F}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{A}}} &= \frac{-4+6\mathrm{i} - (-2-2\mathrm{i})}{6 - (-2-2\mathrm{i})} \\ &= \frac{-4+6\mathrm{i} - (-2-2\mathrm{i})}{6 - (-2-2\mathrm{i})} \\ &= \frac{-2+8\mathrm{i}}{8+2\mathrm{i}} \\ &= \frac{\mathrm{i}\,(8+2\mathrm{i})}{8+2\mathrm{i}} \\ &= \mathrm{i} \end{aligned}$$

b. *En déduire la nature du triangle AEF.*

On a $\dfrac{z_{\text{F}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{E}} - z_{\text{A}}} = \text{i}$

donc $\dfrac{AF}{AE} = 1$ et $\left(\overrightarrow{AE}\,\overrightarrow{AF}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\boxed{\text{AEF est donc un triangle rectangle isocèle.}}$

5. *Soit I le milieu de [EF]. Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle* $-\dfrac{\pi}{2}$.

Soit r la rotation de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
AEF est donc un triangle rectangle isocèle direct et I est le milieu de [EF].
(AI) est donc perpendiculaire à (EF) et AI = EI = FI.

Ainsi $r(\text{E}) = \text{A}$ et $r(\text{A}) = \text{F}$.
Il reste à déterminer $\text{B}' = r(\text{B})$.
Or $z_I = \dfrac{z_E + z_F}{2} = \dfrac{6 + (-4 + 6\text{i})}{2} = 1 + 3\text{i}$
r a pour écriture complexe $z' - z_I = -\text{i}\,(z - z_I)$.

$$\begin{aligned} \text{d'où :}\quad z' &= -\text{i}z + z_I\,(1 + \text{i}) \\ &= -\text{i}z + (1 + 3\text{i})\,(1 + \text{i}) \\ &= -\text{i}z - 2 + 4\text{i}. \end{aligned}$$

et $z_{\text{B}'} = -\text{i} \times 2 - 2 + 4\text{i} = -2 + 2\text{i}$.
Ainsi $\text{B}' = \text{D}$.

$\boxed{\text{l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle } -\dfrac{\pi}{2} \text{ est le triangle AFD}}$