Séries numériques

1 Les définitions

⋆ **Série :** On appelle série de terme général u_n et on note $\sum\limits_{i\in I} u_n$ la suite $(u_n, \sum u_k)_{i\in I}$

Remarque :
I est un ensemble infini inclus dans $\mathbb{N}$, le plus souvent tel qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $I = \{n \in \mathbb{N},\ n \geqslant a\}$.

⋆ **Série convergente :** $S_n = \sum\limits_{k=a}^{n} u_k$ est appelé *somme partielle de rang* n de la série.

La série de terme général converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in I}$ est convergente.

La somme de la série *(en général notée S)* est la limite de la suite $(S_n)_{n\in I}$; on note $S = \sum\limits_{n=a}^{+\infty} u_n$ ou $S = \sum\limits_{n\geqslant a} u_n$.

⋆ **Reste d'une série convergente :** Soit $\sum\limits_{n\in I} u_n$ une série convergente de somme S, on définit le *reste de rang* N de la série par : $R_N = S - S_N = \sum\limits_{n\geqslant N+1} u_n$

2 Les théorèmes au programme

⋆ Si $\sum\limits_{n\in I} u_n$ est une série convergente, alors le reste de rang N tend vers 0.

⋆ **Théorème de comparaison des séries à termes positifs**
Soient $\sum\limits_{n\in I} u_n$ et $\sum\limits_{n\in J} v_n$ deux séries à termes positifs ; on suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$:
- Si $\sum\limits_{n\in I} u_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\in J} v_n$ diverge.
- Si $\sum\limits_{n\in J} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\in I} u_n$ converge.

⋆ **Convergence absolue**
Définition : la série $\sum\limits_{n\in I} u_n$ est *absolument convergente* si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Théorème : si la série $\sum\limits_{n\in I} u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

La réciproque est fausse, exemple : la série harmonique alternée (de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$) est convergente, mais pas absolument convergente.

3 Les autres théorèmes

⋆ **Utilisation d'équivalents :** Soient $\sum\limits_{n\geqslant a} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant b} v_n$ deux séries *à termes positifs*.
- Si $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum\limits_{n\geqslant a} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant b} v_n$ sont de même nature (c'est à dire toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes).
- Si $u_n \underset{\infty}{=} o(v_n)$, alors :
  - $\sum\limits_{n\geqslant b} v_n$ converge $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant a} u_n$ converge.
  - $\sum\limits_{n\geqslant b} u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant a} v_n$ diverge.

* **Comparaison avec une intégrale :** Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ ou $[a, +\infty[$, positive, décroissante.
  La série $\sum_{n \geqslant a} u_n$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t$ sont de même nature, de plus :
  – Si l'intégrale de f diverge (vers $+\infty$ puisque f est à valeurs positives) alors la somme partielle S_n et $\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}\,t$ sont équivalentes lorsque $n \to \infty$.
  – Si l'intégrale de f converge, on peut encadrer le reste d'ordre N : $\int_{N+1}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t \leqslant R_N \leqslant \int_N^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t$; ce qui permet en général d'avoir un équivalent de R_N.
  Remarque : on n'a pas supposé que f tend vers 0 en $+\infty$; comme f décroît et est minorée par 0 elle a une limite à l'infini ; si cette limite est > 0, l'intégrale de f diverge et le premier résultat reste valable, toutefois dans ce cas la série diverge grossièrement.
* **Critère spécial des séries alternées**
  Soit (u_n) une suite positive décroissante de limite nulle et soit la série $\sum_{n \geqslant a} (-1)^n\, u_n$.
  – Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
  – La série $\sum_{n \geqslant a} (-1)^n\, u_n$ converge et $\forall n \geqslant a/2,\ S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$.
* **Séries doubles** On considère $\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j}$ une série doublement indicée.
  Si pour tout $i \in I$ la série $\sum_{j \in J} |u_{i,j}|$ converge et a pour somme U_i et si $\sum_{i \in I} U_i$ converge, alors :
  – Pour tout $j \in J$ la série $\sum_{i \in I} u_{i,j}$ converge absolument et a pour somme V_j, et $\sum_{j \in J} V_j$ converge.
  – La série $\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)$ converge et $\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right)$.

4 Les séries de référence

* **Les séries exponentielles :** Pour tout $z \in \mathbb{C}$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument et a pour somme e^z.
* **Les séries géométriques et leurs dérivées :** soit $q \in \mathbb{C}$
  – Si $|q| < 1$ alors les séries $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} n\, q^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} n^2\, q^n$ convergent absolument et :
  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.
  $\sum_{n=0}^{\infty} n\, q^n = \frac{q}{(1-q)^2}$.
  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2\, q^n = \frac{q\,(q+1)}{(1-q)^3}$
  – Si $|q| \geqslant 1$, alors les séries ci-dessus divergent grossièrement.

5 Les autres séries "à connaître"

* **Les séries de Riemann :** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
  – Si $\alpha \leqslant 1$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente (grossièrement si $\alpha \leqslant 0$).
  – Si $\alpha > 1$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.
* **Les séries logarithme, sinus, cosinus :**
  En utilisant $\cos x = \frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2\,i}$ on obtient :
  – $\forall x \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2\,n}}{2\,n)!}$ est absolument convergente et a pour somme $\cos x$.
  – $\forall x \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2\,n+1}}{2\,n+1)!}$ est absolument convergente et a pour somme $\sin x$.
  Soit $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n}$ est absolument convergente et a pour somme $\ln(1+x)$.
  Pour $x = -1$, la série converge vers $\ln 2$ (série harmonique alternée) mais ne converge pas absolument.