Réduction des endomorphismes

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés aux matrices suivantes :
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -6 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

2. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{bmatrix} 0 & a & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a^2} \\ a & a^2 & 0 \end{bmatrix}$
   (a) Calculer A^2 et montrer qu'on peut l'exprimer comme combinaison linéaire de A et I_3.
   (b) Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors, λ est racine de $x^2 - x - 2 = 0$.
   (c) Déterminer les valeurs propres de A, les vecteurs propres associés et déterminer une matrice diagonale semblable à A.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$
   (a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Déterminer les éléments propres de A.

4. Soit A une matrice appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et admettant une unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

5. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et p un projecteur de E.
   (a) Démontrer que $p \circ p = p$.
   (b) Montrer que p est diagonalisable.

6. Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
   (a) Montrer que toute valeur propre non nulle de AB est valeur propre de BA.
   (b) On suppose $n > p$. Montrer que 0 est nécessairement valeur propre du produit AB.
   (c) On considère les matrices suivantes :
   $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
      i. Quelles sont les valeurs propres de BA ?
      ii. En déduire celles de AB.

7. On considère l'application T de $\mathbb{C}[X]$ définie par :
$$\forall P \in \mathbb{C}[X]\,,\, T(P) = (3X+8)P + (X^2 - 5X)P' - (X^3 - X^2)P''$$
   (a) Démontrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n = \deg(P)$ et $a_n \neq 0$. Déterminer une condition nécessaire pour avoir $\deg(T(P)) = \deg(P)$.
   (c) Montrer que $\mathbb{C}_3[X]$ est stable par T.
   (d) En déduire les éléments propres de T.

8. On considère la matrice $J \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ définie par :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Calculer J^4. En déduire que $\mathrm{Sp}(J) \subset \{-1, 1, -i, i\}$.
   (b) Déterminer les éléments propres de J.
   (c) La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$? Et dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$?

9. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f vérifie la relation : $f^2 - 5f + 6\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   (a) Déterminer les valeurs propres possibles de f.
   (b) Démontrer que f est diagonalisable.

10. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n où :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

11. (a) Déterminer toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.
   (b) Peut-on trouver $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$? Et $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$?

12. Les deux matrices suivantes sont-elles semblables ? Sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation matricielle :

$$X^2 + X = A \qquad (E)$$

   c'est-à-dire de déterminer toutes les matrices $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ solutions de (E).
   (a) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
   (b) Soit $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $Y = P^{-1}XP$.
      i. Montrer que X est solution de (E) si et seulement si $Y^2 + Y = D$.
      ii. Montrer qu'on a alors l'égalité : $DY = YD$.
      iii. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

14. On se propose dans cet exercice de résoudre le système différentiel suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = 6x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = -5x(t) + 3y(t) \end{cases} \qquad (\mathscr{S})$$

   (a) Donner une traduction matricielle de ce problème.
   (b) Montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ est semblable à une matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$.
   (c) Montrer, grâce à la question 14b, que le système $(\mathscr{S})$ est équivalent au système :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1'(t) = \alpha x_1(t) \\ y_1'(t) = \beta y_1(t) \end{cases} \qquad (\mathscr{S}')$$

   (d) Déterminer toutes les solutions de $(\mathscr{S}')$ puis les solutions de $(\mathscr{S})$.

1. $\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ (Spectre d'une rotation)

   On désigne par $\vec{\mathscr{P}}$ le plan vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$. On note r la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{6}$.

   (a) Déterminer la matrice A de r dans la base $\mathscr{B}$.

   (b) Déterminer $\mathrm{Sp}(r)$.

2. $\boxed{\textbf{Exercice 9}}$ (Diagonalisation simultanée)

   Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent, c'est-à-dire, vérifient $f \circ g = g \circ f$.

   (a) Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g.

   (b) On suppose que f admet un sous-espace propre de dimension 1. Montrer qu'alors, f et g admettent au moins un vecteur propre en commun.

   (c) On suppose que f admet n valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer que f et g sont diagonalisables dans une même base.