2 B.C.P.S.T – VÉTO 2 Lundi 8 février 2016

Variables aléatoires à densité

1. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(a, \alpha) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{a}\left(\frac{a}{x-x_0}\right)^{\alpha+1} & \text{si } x > x_0 + a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Démontrer que f est une densité de probabilité. Si une variable aléatoire à densité X possède f pour densité, on dit que X suit une loi de Pareto de paramètres x_0, a et α, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}ar(x_0, a, \alpha)$.

   (b) Déterminer la fonction de répartition F d'une variable X suivant une telle loi.

   (c) Pour tout $t \geqslant a$, calculer $P(X \geqslant x_0 + t)$.

2. Soient $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}$$

   (a) Démontrer que f est une densité de probabilité. Si une variable aléatoire à densité X possède f pour densité, on dit que X suit une loi de Cauchy de paramètre a, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{C}(a)$.

   (b) Déterminer la fonction de répartition F d'une variable X suivant une telle loi.

   (c) Soient X une telle variable aléatoire et $b > 0$. Déterminer la loi de bX.

   (d) Montrer que si X suit une loi de Cauchy de paramètre 1, il en est de même de $\frac{1}{X}$.

3. Soit X une variable aléatoire quasi-certaine. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = a) = 1$.

   (a) Déterminer la fonction de répartition de X.

   (b) La variable X peut-elle être une variable aléatoire à densité ?

4. Déterminer les réels a et b pour que la fonction F suivante soit une fonction de répartition.

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ F(x) = \begin{cases} \frac{a(x+4)}{b+|x|} & \text{si } x > -4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. Soient $k \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = \begin{cases} k\left(\frac{1}{3}\right)^{E(x)} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Peut-on choisir le réel k de sorte que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente et égale à 1 ?

   (b) La fonction f est-elle une densité de probabilité ?

6. Soit X une variable aléatoire à densité dont une densité f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et paire. Démontrer que la fonction de répartition F de X vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ F(x) = 1 - F(-x)$$

7. Soient $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = \frac{a}{2}e^{-a|x|}$$

   (a) Démontrer que f est une densité de probabilité. Si une variable aléatoire à densité X possède f pour densité, on dit que X suit une loi exponentielle bilatérale de paramètre a, et on note $X \hookrightarrow Eb(a)$.

   (b) Déterminer la fonction de répartition F d'une variable X suivant une telle loi.

   (c) Soient X une telle variable aléatoire et $b > 0$. Déterminer les lois de bX et $|X|$.

   (d) Montrer que si $X \hookrightarrow Eb(a)$, alors, X admet une espérance et une variance, et calculer ces réels.