2 B.C.P.S.T – VÉTO 2 Lundi 28 septembre 2015

Applications linéaires

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(1;2) = (1;1;0)$ et $f(2;1) = (0;1;1)$. Calculer alors $f(x,y)$ puis déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

2. On considère les applications $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longmapsto & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array} \right.$ et $v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longmapsto & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$
   (a) Démontrer que u et v sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Déterminer les noyaux et images des applications u et v.
   (c) Ces applications sont-elles injectives ? surjectives ?
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v \circ u^n - u^n \circ v = nu^{n-1}$.

3. Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$. Soit ϕ l'application qui à tout f de E associe l'application $\phi(f)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(f)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt$.
   (a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
   (b) Soit $f \in E$. Montrer que $g = \phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$ pour x réel.
   (c) On pose $f_0(x) = \sin(2\pi x)$. Que vaut $\phi(f_0)$? ϕ est-elle injective ?
   Montrer que $\text{Ker}(\phi) = \left\{ f \in E \,/\, f \text{ est 1-périodique et } \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$
   (d) ϕ est-elle surjective ?

4. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$.
   (a) Montrer l'équivalence : $v \circ u = 0 \iff \text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$.
   (b) Comparer pour l'inclusion : $\text{Ker}(v \circ u)$ et $\text{Ker}(u)$
   (c) Comparer pour l'inclusion : $\text{Im}(v \circ u)$ et $\text{Im}(v)$.

5. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que :
$$\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\} \iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$$

6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour chaque endomorphisme f de E et pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on note $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$. On dit qu'un endomorphisme f est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$.
   (a) Montrer que si f est un endomorphisme nilpotent, alors f n'est pas bijectif.
   (b) Montrer que si f est un endomorphisme nilpotent, alors $\text{Id}_E - f$ et $\text{Id}_E + f$ sont des automorphismes de E. (On pourra factoriser judicieusement $\text{Id}_E^n - f^n$)

7. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $a_1, \ldots, a_n$ des vecteurs de E.
   (a) On suppose que $\big(f(a_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre. Montrer que la famille $\big(a_i\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ l'est aussi.
   (b) Montrer que la réciproque est fausse. Donner une condition suffisante pour qu'elle soit vraie.
   (c) On suppose que $\big(a_i\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est génératrice de E et que f est surjective. Montrer que la famille $\big(f(a_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est génératrice de F.

8. Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\text{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. On appelle ce scalaire la *trace* de la matrice A.
   (a) Montrer que Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (b) Vérifier que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (c) On dit que deux matrices A et B sont semblables s'il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1} A P$.
   Montrer que deux matrices semblables ont la même trace.