Devoir surveillé 2

le samedi 05 novembre

Problème 1

Le but de ce problème est d'étudier les symétries vectorielles, c'est-à-dire les endomorphismes s d'un espace vectoriel E vérifiant $s \circ s = id_E$.

PARTIE I : point de vue géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. On se place dans $\mathbb{R}^n$. On note $\overrightarrow{d} = (1, \dots, 1)$ et on définit

$$D = \text{Vect} < \overrightarrow{d} > \quad \text{et} \quad H = \left\{ \overrightarrow{u} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad x_1 + \dots + x_n = 0 \right\}$$

On notera également $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $\overrightarrow{u} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour laquelle $\overrightarrow{u} - \lambda \overrightarrow{d} \in H$ et la donner.
   (b) En déduire que tout vecteur de $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$ se décompose de manière unique sous la forme $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_H} + \overrightarrow{u_D}$ avec $\left(\overrightarrow{u_H}, \overrightarrow{u_D}\right) \in H \times D$.

On peut donc définir l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_H} + \overrightarrow{u_D} \in \mathbb{R}^n$ (décomposé comme au 1.(b)) associe le vecteur $s\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u_H} - \overrightarrow{u_D}$.

2. On suppose dans cette question que $n = 2$. On a donc $D = \text{Vect} < \overrightarrow{d} >$ où $\overrightarrow{d} = (1, 1)$. Vérifier que $H = \text{Vect} < \overrightarrow{h} >$ où $\overrightarrow{h} = (1, -1)$. Sur un dessin, représenter le vecteur $\overrightarrow{u} = (3, -1)$ et construire géométriquement les vecteurs $\overrightarrow{u_H} \in H$ et $\overrightarrow{u_D} \in D$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_H} + \overrightarrow{u_D}$. Construire ensuite le $s\left(\overrightarrow{u}\right)$. La terminologie de symétrie vous semble-t-elle adaptée ?
3. On revient au cas général : n est un entier naturel quelconque tel que $n \geq 2$.
   (a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. En donner une base $\mathcal{B}_H$ et la dimension.
   (b) On note $\mathcal{C}$ la famille constituée des vecteurs de $\mathcal{B}_H$ auxquels on rajoute à la fin le vecteur $\overrightarrow{d}$. Montrer que la famille $\mathcal{C}$ constitue une base de $\mathbb{R}^n$.
   (c) Donner la matrice de s dans $\mathcal{C}$.

PARTIE II : un exemple de symétrie dans un espace de fonctions

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note F l'ensemble des fonctions de E de la forme

$$f : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & P(x) + Q(x)\ln(x) \end{array}$$

où P et Q sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. On définit également les fonctions

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}, \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}, \quad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array} \quad \text{et} \quad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(x) \end{array}$$

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que la famille de fonctions $\mathcal{B} = \left(f_1, f_2, f_3, f_4\right)$ est une base de F.
3. On note φ l'application définie sur F et qui à toute fonction $f \in F$ associe la fonction $\varphi(f)$ définie par

$$\forall\, x \in]0, +\infty[\,, \quad \varphi(f)(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right).$$

   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de F.
   (b) Déterminer la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$.
   (c) Montrer que φ est une symétrie vectorielle de F.

PARTIE III : matrice d'une symétrie dans une base adaptée

1. Étude d'un exemple. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est donnée par

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que f est bien une symétrie de E.

(b) Déterminer une base $\left(\overrightarrow{a_1}\right)$ de $\mathrm{Ker}(f+id_E)$ et une base $\left(\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}\right)$ de $\mathrm{Ker}(f-id_E)$.

(c) Montrer que la famille $\mathcal{C}=\left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}\right)$ est une base de E et donner la matrice D de f dans $\mathcal{C}$.

(d) Déterminer une matrice P inversible telle que $M=PDP^{-1}$. En déduire une expression de M^n en fonction de D^n, P et P^{-1}.

2. Cas général. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et s une symétrie de E. On note

$$F=\mathrm{Ker}(s-id_E)=\left\{\overrightarrow{u}\in E\ :\ s\left(\overrightarrow{u}\right)=\overrightarrow{u}\right\}\quad\text{et}\quad G=\mathrm{Ker}(s+id_E)=\left\{\overrightarrow{u}\in E\ :\ s\left(\overrightarrow{u}\right)=-\overrightarrow{u}\right\}$$

(a) Soit $\overrightarrow{u}\in E$. On suppose qu'il existe $\left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)\in F\times G$ tel que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$. Démontrer que

$$\overrightarrow{v}=\frac{\overrightarrow{u}+s\left(\overrightarrow{u}\right)}{2}\quad\text{et}\quad\overrightarrow{w}=\frac{\overrightarrow{u}-s\left(\overrightarrow{u}\right)}{2}$$

(b) Démontrer que tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E peut s'écrire $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ avec $\left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)\in F\times G$.
indication : la question précédente vous donne les candidats....

(c) Soit $\mathcal{B}_F=\left(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_p}\right)$ une base de F et $\mathcal{B}_G=\left(\overrightarrow{e_{p+1}},\dots,\overrightarrow{e_{p+q}}\right)$ une base de G. Montrer que la juxtaposition $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G)=\left(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_{p+q}}\right)$ de ces deux bases forme une base de E. Donner alors la matrice de s dans $\mathcal{B}$.

Problème 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 dont une base est $\mathcal{B}=\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4}\right)$.
On notera θ l'application nulle et id_E l'application identité de E.
Si g est un endomorphisme de E, on définit : $g^n=\underbrace{g\circ g\circ\cdots\circ g}_{n\text{ facteurs}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $g^0=id_E$.
Nous supposerons que f est un endomorphisme de E tel que $f^3=\theta$ et $f^2\neq\theta$.

1. Préliminaires

(a) Préciser l'espace Image et le noyau de l'application θ.

(b) Montrer pour tout endomorphisme f de E les inclusions suivantes :

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Ker}\,f & \subset & \mathrm{Ker}\left(f^2\right) & \subset & \mathrm{Ker}\left(f^3\right)\\ \mathrm{Im}\,f & \supset & \mathrm{Im}\left(f^2\right) & \supset & \mathrm{Im}\left(f^3\right)\end{array}$$

(c) Prouvez pour tout endomorphisme f de E les deux implications suivantes :

$$\left[\ \mathrm{Im}\,(f)=\mathrm{Im}\left(f^2\right)\Longrightarrow\mathrm{Im}\left(f^2\right)=\mathrm{Im}\left(f^3\right)\ \right]\quad\text{et}\quad\left[\ \mathrm{Ker}\,(f)=\mathrm{Ker}\left(f^2\right)\Longrightarrow\mathrm{Ker}\left(f^2\right)=\mathrm{Ker}\left(f^3\right)\ \right]$$

2. Nous nous proposons dans cette question de montrer que le rang de f vaut 2.

(a) Justifiez $\dim\left(\mathrm{Im}\left(f^2\right)\right)\geq 1$ et $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2\right)\right)\leq 3$.

(b) Montrer que $\mathrm{Im}\left(f^2\right)\subset\mathrm{Ker}\,(f)\subset\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ et que $\mathrm{Ker}\,(f)\neq\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.

(c) En déduire que $\left\{\begin{array}{l}\dim\left(\mathrm{Im}\left(f^2\right)\right)=1\\ \dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right)=1\end{array}\right.$ ou bien $\left\{\begin{array}{l}\dim\left(\mathrm{Im}\left(f^2\right)\right)=1\\ \dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right)=2\end{array}\right.$ ou bien $\left\{\begin{array}{l}\dim\left(\mathrm{Im}\left(f^2\right)\right)=2\\ \dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right)=2\end{array}\right.$.

(d) Nous supposerons dans cette question $\dim\left(\mathrm{Im}\left(f^2\right)\right)=1$ et $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right)=1$ et considérerons l'application $\Phi:\begin{array}{ccc}\mathrm{Im}\,(f) & \longrightarrow & \mathrm{Im}\left(f^2\right)\\ \overrightarrow{v} & \longmapsto & f\left(\overrightarrow{v}\right)\end{array}$.

i. Montrer que Φ est linéaire et que $\mathrm{Ker}\,(\Phi)\subset\mathrm{Ker}\,(f)$.

ii. Montrer que Φ n'est pas l'application nulle. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}\,(\Phi)$.

iii. En déduire à l'aide du théorème du rang la dimension de $\mathrm{Ker}\,(\Phi)$.

iv. En quoi ce résultat est-il contradictoire ?

(e) Nous supposerons dans cette question $\dim\left(\mathrm{Im}\left(f^2\right)\right)=2$ et $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right)=2$.
Prouver $\mathrm{Im}\,(f)=\mathrm{Im}\left(f^2\right)$. Qu'en résulte-t-il ?

(f) Conclure.

3. Soit $\overrightarrow{i}$ un vecteur de E tel que $f^2\left(\overrightarrow{i}\right)\neq\overrightarrow{0_E}$ et $\overrightarrow{\ell}$ un vecteur de $\mathrm{Ker}\,(f)$ tel que la famille $\left(f^2\left(\overrightarrow{i}\right),\overrightarrow{\ell}\right)$ soit libre.

(a) Justifier l'existence de ces vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{\ell}$.

(b) On pose $\overrightarrow{j}=f\left(\overrightarrow{i}\right)$ et $\overrightarrow{k}=f^2\left(\overrightarrow{i}\right)$.

i. Montrer que la famille $\mathcal{C}=\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k},\overrightarrow{\ell}\right)$ est une base de E.

ii. Quelle est la matrice B de f dans cette base $\mathcal{C}$?