Corrigé du devoir surveillé n^o 1

Problème 1

Partie I

1. On résout l'équation homogène associée : $(x-1)\,y' + y = 0$ sur $]-\infty\,,\,1[$; les solutions sont les fonctions multiples de la fonction définie sur $]-\infty\,,\,1[$ par $x \longmapsto \exp\big(-\ln(1-x)\big) = \dfrac{1}{1-x}$

   Puis on cherche une solution particulière f_0 de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante : soit λ une fonction définie et dérivable sur $]-\infty\,,\,1[$, on pose pour tout $x \in]-\infty\,,\,1[\,,\ f_0(x) = \dfrac{\lambda(x)}{1-x}$

   $f_0'(x) = \dfrac{\lambda'(x)}{1-x} + \dfrac{\lambda(x)}{(1-x)^2}$, d'où en substituant dans (E) : $\lambda'(x) = -\,e^{-x}$; on peut choisir $\lambda(x) = e^{-x}$ ce qui donne $f_0(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$

   Ainsi les solutions de l'équation (E) sur $]-\infty\,,\,1[$ sont les fonctions de la forme

   $$\boxed{x \longmapsto \frac{K+e^{-x}}{1-x},\ K \in \mathbb{R}}$$

2. On remarque que la fonction f proposée est bien solution de (E) sur l'intervalle $]-\infty\,,\,1[$ car c'est une fonction de la forme trouvée à la question précédente avec $K = 0$.

   Soit y une solution de (E), on a $y(0) = \dfrac{K+e^0}{1-0} = K+1$, donc $y(0) = 1 \iff K = 0$

   La fonction f est donc l'unique solution de (E) qui prend la valeur 1 en 0.

3. f est dérivable sur $]-\infty\,,\,1[$ et $f'(x) = \dfrac{f(x)}{1-x} = \dfrac{x\,e^{-x}}{(1-x)^2}$; ainsi f' est du signe de x.

   f est décroissante sur $]-\infty\,,\,0[$ et croissante sur $]0\,,\,1[$.

   Au voisinage de $-\infty$, $1-x \sim -x$ donc $f(x) \underset{-\infty}{\sim} -\dfrac{e^{-x}}{x}$ par conséquent $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

   $\lim\limits_{x\to1^-} 1-x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$

   La courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$ et une branche asymptotique d'axe (Oy) en $-\infty$.

4. Au voisinage de 0 : $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ donc $f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

Partie II

1. f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty\,,\,1[$, donc de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; d'après la formule de Taylor Young on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x < 1,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k + o(x^n)$.

   Donc $d_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$; en particulier $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ et $d_2 = \dfrac{1}{2}$

2. On peut démontrer cette relation par récurrence sur n :

   Initialisation : pour $n = 0$ cette relation n'est rien d'autre que l'équation différentielle (E) dont f est effectivement solution.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel donné tel que $\forall x < 1,\ (x-1)\,f^{(n+1)}(x) + (n+1)\,f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$

   On dérive cette relation et on obtient : $\forall x < 1,\ (x-1)\,f^{(n+2)}(x) + f^{(n+1)}(x) + (n+1)\,f^{(n+1)}(x) = -(-1)^n e^{-x}$, c'est à dire $\forall x < 1,\ (x-1)\,f^{(n+2)}(x) + (n+2)\,f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} e^{-x}$.

   La formule proposée est donc vraie pour tout $x < 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En appliquant la formule en 0 pour n quelconque, on obtient : $-f^{(n+1)}(0) + (n+1)\,f^{(n)}(0) = (-1)^n$ ou encore $-(n+1)!\,d_{n+1} + (n+1)\,n!\,d_n = (-1)^n$, d'où la relation demandée entre d_n et d_{n+1}.

4. Fonction Python qui calcule $d = n$ en fonction de n :

```python
def d(n):
    d,facto=1,1
    for k in range(n):
        facto*=(k+1)
        d-=((-1)**k)/facto
    return d
```

Le calcul de $d(20)$ donne 0.36787944117144245

5. En sommant les égalités obtenues à la question 3 pour k variant de 0 à n on obtient :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} d_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} d_k + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$ puis $\displaystyle d_{n+1} = d_0 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$, finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

Partie III

1. Initialisation : soit $n = 0$, on a bien $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}\ e^{-x} = \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k + (-1)^1 \int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - \int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ donné, supposons que $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}\ e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k + (-1)^{(n+1)} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t}\,\mathrm{d}t \quad (\star)$

Par intégration par partie on a : $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}\ \int_0^x (x-t)^n\, e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\, e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$

et en substituant dans $(\star)$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ e^{-x} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\, e^{-x} - \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k + (-1)^{n+2} \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En conclusion on a bien montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k + (-1)^{(n+1)} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

2. La formule établie à la question précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left|e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k\right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t}\,\mathrm{d}t\right| \underset{\text{pour } x \geqslant 0}{\overset{\uparrow}{=}} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Donc pour tout $t \in [0, x], 0 < e^{-t} \leqslant 1$ donc $\displaystyle 0 < \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

On a donc prouvé le résultat suivant :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \left|e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}$$

3. Soit $x \geqslant 0$ fixé, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut écrire $\displaystyle u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^n}{n!} \times \frac{x}{n+1}$

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{x}{n+1} = 0$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\forall n \geqslant n_0,\ 0 < \frac{x}{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$; ainsi :

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0,\ 0 < u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\, u_n}$$

On montre alors par récurrence sur n que $\forall n \geqslant n_0,\ 0 < u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

4. L'inégalité de la question 2 appliquée à $x=1$ donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|e^{-1} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right| = \left|\frac{1}{e} - d_n\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$

$$\boxed{\text{On a donc prouvé : } \lim_{n\to+\infty} d_n = \frac{1}{e}}$$

Problème 2

Partie I

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^x + x\,e^x = (x+1)\,e^x$ donc $\forall x \in [-1\,;+\infty[\ \ g'(x) \geqslant 0$; g' ne s'annule que pour $x=-1$ donc est strictement positif sur $]-1\,;+\infty[$, ainsi g est injective sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$. De plus $g(-1) = -\frac{1}{e}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ donc la restriction de g à $[-1\,;+\infty[$ réalise une bijection vers $\left[-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-1/e$		$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$	$+$	
h	-1	$\nearrow$	$+\infty$

(b) h est dérivable en x si et seulement si g' ne s'annule pas en $h(x)$, or g' s'annule en $-1 = h\left(-\frac{1}{e}\right)$; ainsi h est dérivable sur $\left]-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$.

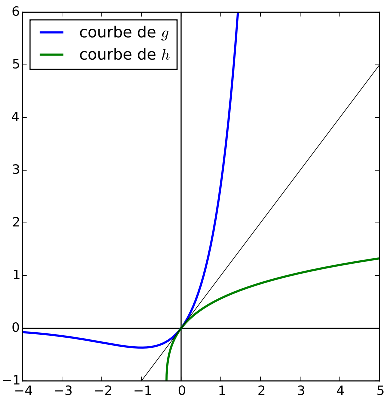
$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[\,,\ h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))} = \frac{1}{\underbrace{h(x)\exp(h(x))}_{g\circ h(x)} + \exp(h(x))} = \frac{1}{x + \exp(h(x))} = \frac{h(x)}{x\,(1+h(x))}$$

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[\,,\ h'(x) = \frac{h(x)}{x\,(1+h(x))}}$$

Remarques :

$\star$ cette formule n'est pas valable pour $x=0$, cependant h' est bien définie en 0 et vaut 1 puisque $g'(h(0)) = g'(0) = 1$. On retrouve ce résultat en remarquant que $h(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $h'(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{1+h(x)} = 1$

$\star$ h n'est pas dérivable pour $x = -1/e$ et sa courbe admet une tangente verticale au point de coordonnées $(-1/e\,;-1)$.



2. (a) α est défini par $\alpha = h\left(\frac{1}{2}\right)$ ce qui équivaut à $g(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Or g est continue et strictement croissante entre 0 et $\frac{1}{2}$, $g(0) = 0 < \frac{1}{2}$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{2} > \frac{1}{2}$, donc

$$\boxed{\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[}$$

(b) φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -\frac{e^{-x}}{2}$, donc

$\forall x \geqslant 0,\ 0 < e^{-x} \leqslant 1$ et $|\varphi'(x)| = \dfrac{e^{-x}}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}$; d'autre part :

$g(\alpha) = \dfrac{1}{2}$ donc $\alpha\, e^{\alpha} = \dfrac{1}{2}$; ainsi $e^{-\alpha} = 2\,\alpha$ et $\varphi(\alpha) = \dfrac{e^{-\alpha}}{2} = \alpha$

(c) φ est à valeurs positives sur $[0\,,\, +\infty[$ donc on montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$:
$u_0 = 0 \geqslant 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$ donné, si on suppose $u_n \geqslant 0$, alors $\varphi(u_n) \geqslant 0$ donc $u_{n+1} \geqslant 0$.
On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis à φ entre u_n et α :

$$\exists c \in]u_n, \alpha[\text{ ou }]\alpha, u_n[\text{ tel que } \big|\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)\big| = \big|\varphi'(c)\big| \times |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,\big|u_n - \alpha\big|$$

Comme $\varphi(u_n) = u_{n+1}$ et $\varphi(\alpha) = \alpha$, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ \big|u_{n+1} - \alpha\big| \leqslant \dfrac{1}{2}\,\big|u_n - \alpha\big|$

On montre ensuite par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N},\ \big|u_n - \alpha\big| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \big|u_0 - \alpha\big|$:

C'est vrai de façon évidente pour $n = 0$ car $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$.

Soit $n \geqslant 0$ donné, supposons que $\big|u_n - \alpha\big| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \big|u_0 - \alpha\big|$, on a alors :

$$\begin{aligned}\big|u_{n+1} - \alpha\big| &\leqslant \frac{1}{2}\,\big|u_n - \alpha\big| \\ &\leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \big|u_0 - \alpha\big| \ \textit{(d'après l'hypothèse de récurrence au rang n)} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \big|u_0 - \alpha\big|\end{aligned}$$

On conclut en appliquant le théorème d'encadrement, dit "théorème des gendarmes" :
comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$ donc la suite (u_n) converge vers α.

(d) $|u_0 - \alpha|$ est majoré par $\dfrac{1}{2}$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$; ainsi on est certain que si $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \leqslant 10^{-2}$ alors $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-2}$.

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \leqslant 10^{-2} \iff -(n+1)\ln 2 \leqslant -2\ln 10 \iff n + 1 \geqslant \dfrac{2\ln 10}{\ln 2} \simeq 6,64$

Cela donne $n + 1 \geqslant 7$ d'où $n \geqslant 6$; ainsi u_6 est une valeur approchée de α à 10^{-2} près au maximum.
Remarque : si on connaît les premières valeurs de puissances de 2, entre autres $2^7 = 128$ parce qu'on joue au 2048 par exemple, on peut se passer des logarithmes : $2^7 > 100 > 2^6$ donc $\left(\dfrac{1}{2}\right)^7 < 10^{-2} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^6$.

Partie II

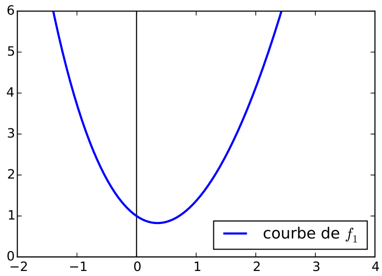
1. (a) f_λ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\forall x \in \mathbb{R},\ f_\lambda'(x) = -\,e^{-x} + 2\,\lambda\, x$ et
$f_\lambda'(x) \geqslant 0 \iff 2\,\lambda\, x \geqslant e^{-x} \iff x\, e^{x} \geqslant \dfrac{1}{2\,\lambda}$, ou encore $g(x) \geqslant \dfrac{1}{2\,\lambda}$, ce qui donne en composant par h :
$x \geqslant h\left(\dfrac{1}{2\,\lambda}\right)$. En posant $m_\lambda = h\left(\dfrac{1}{2\,\lambda}\right)$ on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		m_λ		$+\infty$
$f_\lambda'(x)$		$-$	0	$+$	
f_λ	$+\infty$	$\searrow$	$f_\lambda\,(m_\lambda)$	$\nearrow$	$+\infty$

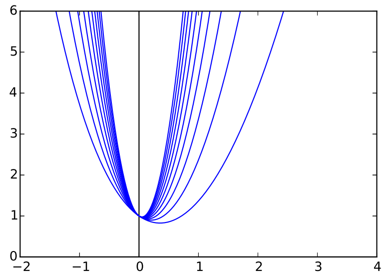
h est croissante et $h(0) = 0$, or $\frac{1}{2\,\lambda} > 0$ donc $m_\lambda = h\left(\frac{1}{2\,\lambda}\right) > 0$

(b) $f_\lambda\,(m_\lambda) = e^{-m_\lambda} + \lambda\, m_\lambda^2$; or $e^{-m_\lambda} = 2\,\lambda\, m_\lambda$ donc $f_\lambda\,(m_\lambda) = 2\,\lambda\, m_\lambda + \lambda\, m_\lambda^2 = \lambda\, m_\lambda\,(2 + m_\lambda)$.

(b)



(c)



```
from matplotlib.pyplot import *
from numpy import linspace, exp
def f(lamda,x):
      return exp(-x)+lamda*(x**2)

figure(2,figsize=(6,4))
clf()
lamda=1
ylim(0,6)
axhline(color='k')
axvline(color='k')
x=linspace(-2,4,1000)
y=f(lamda,x)
plot(x,y,linewidth=2,color='blue',..
label='courbe de $f_1$')
legend(loc=4)
```

```
from matplotlib.pyplot import *
from numpy import linspace, exp

def f(lamda,x):
      return exp(-x)+lamda*(x**2)

figure(3,figsize=(6,4))

ylim(0,6)
axhline(color='k')
axvline(color='k')
x=linspace(-2,4,1000)

#legend(loc=4)
for lamda in range(1,11):
      y=f(lamda,x)
       plot(x,y,linewidth=1,color='blue')
```

2. (a) Par définition $m(1) = h\left(\frac{1}{2\times 1}\right)$ donc $m(1) = \alpha$.

   (b) La fonction m est la composée de $\lambda \mapsto \frac{1}{2\,\lambda}$ qui est décroissante sur $]0,+\infty[$ et de la fonction h qui est croissante, donc m est décroissante.

   $\star$ Lorsque $\lambda \to +\infty$, $\dfrac{1}{2\,\lambda} \to 0$, donc par continuité de h en 0, on déduit $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} m_\lambda = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} h\left(\dfrac{1}{2\,\lambda}\right) = \lim\limits_{u\to 0} h(u) = h(0) = 0$

   $\star$ De même, lorsque $\lambda \to 0^+$, $\dfrac{1}{2\,\lambda} \to +\infty$,donc par composition de limites, on déduit $\lim\limits_{\lambda\to 0} m_\lambda = \lim\limits_{\lambda\to 0} h\left(\dfrac{1}{2\,\lambda}\right) = \lim\limits_{u\to+\infty} h(u) = +\infty$; en résumé

   $$\boxed{m \text{ réalise une bijection strictement décroissante de }]0,+\infty[\text{ vers }]0,+\infty[}$$

   (c) $g\left(m_\lambda\right) = \dfrac{1}{2\,\lambda} = m_\lambda\, e^{m_\lambda}$ donc on a bien $2\,\lambda\, m_\lambda = e^{-m_\lambda}$.

   Lorsque $\lambda \to +\infty$, $m_\lambda \to 0$ donc $e^{-m_\lambda} \to 1$ par conséquent, $m_\lambda \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,\lambda}$.

   (d) En composant par ln dans l'égalité de la question précédente, on obtient bien $m_\lambda + \ln\left(m_\lambda\right) = -\ln(2\,\lambda)$. Lorsque $\lambda \to 0$, $m_\lambda \to +\infty$ donc $\ln(m_\lambda) = o(m_\lambda)$ par conséquent $m_\lambda \underset{\lambda\to 0^+}{\sim} -\ln(2\,\lambda)$.

3. (a) Soient $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$: $f_{\lambda_2}\left(m_{\lambda_2}\right) - f_{\lambda_1}\left(m_{\lambda_2}\right) = (\lambda_2 - \lambda_1)\, m_{\lambda_2}^2 \geqslant 0$ et $f_{\lambda_1}\left(m_{\lambda_2}\right) - f_{\lambda_1}\left(m_{\lambda_1}\right) \geqslant 0$ car f_{λ_1} atteint son minimum en m_{λ_1}, par définition de m_{λ_1}.
   En utilisant la remarque de l'énoncé, on obtient alors $f_{\lambda_2}\left(m_{\lambda_2}\right) - f_{\lambda_1}\left(m_{\lambda_1}\right) = \theta(\lambda_2) - \theta(\lambda_1) \geqslant 0$ ce qui signifie que la fonction θ est croissante.

   (b) θ est monotone sur $]0,+\infty[$ donc admet des limites en 0 et en $+\infty$.

   $\star$ $m_\lambda \underset{\lambda\to 0^+}{\sim} -\ln(2\,\lambda)$ donc $m_\lambda+2 \underset{0^+}{\sim} -\ln(2\,\lambda)$ par conséquent $\theta(\lambda) = \lambda\, m_\lambda\left(m_\lambda + 2\right) \underset{0^+}{\sim} \lambda\left(\ln(2\,\lambda)\right)^2 \underset{\lambda\to 0^+}{\longrightarrow} 0$

   $\star$ $m_\lambda \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,\lambda}$ donc $m_\lambda + 2 \underset{+\infty}{\sim} 2$ et $\lambda\, m_\lambda \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$, par conséquent $\theta(\lambda) = \lambda\, m_\lambda\left(m_\lambda + 2\right) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, ainsi

$$\boxed{\theta \text{ réalise une bijection strictement croissante de }]0,+\infty[\text{ vers }]0,1[}$$

(c) On a donc $\theta(0) = 0$ et θ est dérivable en 0 si et seulement si $\dfrac{\theta(\lambda) - \theta(0)}{\lambda - 0} = \dfrac{\theta(\lambda)}{\lambda}$ admet une limite finie en 0^+.

Or $\dfrac{\theta(\lambda)}{\lambda} = m_\lambda\,(m_\lambda + 2) \underset{\lambda \to 0^+}{\sim} \big(\ln(2\,\lambda)\big)^2 \underset{\lambda \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ donc θ n'est pas dérivable en 0, sa courbe représentative admet une tangente verticale en ce point.

(d) $\theta(1) = f_1(m_1) = f_1(\alpha) = e^{-\alpha} + \alpha^2$, or $e^{-\alpha} = 2\,\alpha$ donc $\theta(1) = \alpha\,(\alpha + 2)$

D'autre part on a $\theta(\lambda) = f_\lambda(m_\lambda) = \lambda\, m_\lambda\,(m_\lambda + 2)$.

m est composé de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ donc est dérivable en tout point de cet intervalle :

$m(\lambda) = h\left(\dfrac{1}{2\,\lambda}\right)$ donc $m'(\lambda) = \dfrac{-1}{2\,\lambda^2} \times h'\left(\dfrac{1}{2\,\lambda}\right) = \dfrac{-1}{2\,\lambda^2} \times \left(\dfrac{h\left(\frac{1}{2\,\lambda}\right)}{\frac{1}{2\,\lambda}\left(1 + h\left(\frac{1}{2\,\lambda}\right)\right)}\right) = \dfrac{-1}{\lambda} \times \left(\dfrac{m_\lambda}{1 + m_\lambda}\right)$

Alors $\theta'(\lambda) = m_\lambda\,(m_\lambda + 2) + \lambda\,(2\,m'_\lambda\, m_\lambda + 2\,m'_\lambda) = m_\lambda\,(m_\lambda + 2) + 2\,\lambda\, m'_\lambda\,(1 + m_\lambda) = m_\lambda\,(m_\lambda + 2) - 2\,m_\lambda$

On obtient finalement l'expression de θ' pour tout $\lambda \in]0,+\infty[$: $\theta'(\lambda) = m_\lambda^2$ donc $\theta'(1) = m_1^2 = \alpha^2$

(e) Tracé de la fonction θ sur l'intervalle $[0,1\,;\,8]$: