Corrigé du devoir surveillé n^o 2

PROBLEME N°1

Partie A : Le cas où P est constant

1. S'il existe un réel b tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a\,u_n + b$, alors en particulier pour $n = 0$ on obtient $u_1 = a\,u_0 + b$, donc b est unique et :

$$\boxed{b = u_1 - a\,u_0}$$

2. (a) $E_1^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \exists b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + b\}$, autrement dit :

$$\boxed{u \in E_1^{(0)} \iff u \text{ est une suite arithmétique}}$$

   (b) $E_0^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \exists b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = b\}$, autrement dit :

$$\boxed{E_0^{(0)} \text{ est l'ensemble des suites constantes à partie du rang 1}}$$

3. $E_a^{(0)}$ est inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, de plus la suite nulle appartient à $E_a^{(0)}$ (il suffit de prendre $b = 0$) donc $E_a^{(0)}$ est non vide.
   Soient à présent λ un réel quelconque, et deux suites u et v de $E_a^{(0)}$:
   $u \in E_a^{(0)}$, donc il existe $b_u \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a\,u_n + b_u$ de même il existe $b_v \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = a\,v_n + b_v$.
   On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda\,u_{n+1} + v_{n+1} = a\,(\lambda\,u_n + v_n) + (\lambda\,b_u + b_v)$, donc $\lambda\,u + v$ appartient à $E_a^{(0)}$; $E_a^{(0)}$ est stable par combinaison linéaire, comme il est non vide et inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, c'est donc un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et par conséquent, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4. On peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 = a \times 1 + (1 - a), \quad a^{n+1} = a \times a^n + 0$, donc les suites x et y sont éléments de $E_a^{(0)}$ avec $b_x = 1 - a$ et $b_y = 0$.
   Soi$E_a^{(0)}$ ent α et β des réels tels que l'on ait $\alpha\,x + \beta\,y = 0$ c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha + \beta\,a^n = 0$.
   En particulier pour $n = 0$, cela donne $\alpha + \beta = 0$, puis pour $n = 1$: $\alpha + a\,\beta = 0$; d'où par soustraction : $(1 - a)\,\beta = 0$ et comme $a \neq 1$ par hypothèse, on en déduit $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$.La famille (x, y) est donc libre.

5. (a) $x_0 = x_1 = 1$; $y_0 = 1$ et $y_1 = a$ donc λ et μ sont solutions du système :
$\begin{cases} \lambda + \mu & = & u_0 \\ \lambda + a\,\mu & = & u_1 \end{cases}$ donc : $\boxed{\mu = \dfrac{u_1 - u_0}{a - 1}}$ et $\boxed{\lambda = \dfrac{a\,u_0 - u_1}{a - 1}}$.

   (b) Soit $\mathcal{P}_n$: $u_n = \lambda\,x_n + \mu\,y_n$ établissons la pour tout n par récurrence :
   Initialisation : l'égalité est vérifiée aux rangs $n = 0$ et $n = 1$ (question précédente).
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie, on a :
   $u_{n+1} = a\,u_n + b_u \quad$ car $u \in E_a^{(0)}$
   $\qquad = a(\lambda\,x_n + \mu\,y_n) + b_u\ $ d'après l'hypothèse de récurrence.
   Or, d'après la question 4, $x_{n+1} = a\,x_n + (1 - a)$ et $y_{n+1} = a\,y_n$, donc :
   $u_{n+1} = \lambda\,(x_{n+1} + a - 1) + \mu\,y_{n+1} + b_u = \lambda\,x_{n+1} + \mu\,y_{n+1} + (\underbrace{a\,u_0 - u_1}_{\lambda(a-1)}) + (\underbrace{u_1 - a\,u_0}_{b_u})$.
   On a donc établi $\mathcal{P}_{n+1}$ donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) On en conclut que toute suite de $E_a^{(0)}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des suites x et y, donc la famille (x, y) engendre $E_a^{(0)}$; comme elle est libre c'en est une base.

6. $E_a^{(0)}$ admet une base composée de deux vecteurs, c'est donc un espace de dimension 2.

Partie B : Le cas où $a \neq 1$

1. (a) • <u>Linéarité :</u> Soient P, Q deux polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
$\phi(\lambda P+Q) = \Big((\lambda P+Q)(0),\dots,(\lambda P+Q)(p)\Big) = \lambda\,\big(P(0),\dots,P(p)\big)+\big(Q(0),\dots,Q(p)\big) = \lambda\,\phi(P)+\phi(Q)$; donc ϕ est linéaire.
• <u>Injectivité :</u> Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$, $P \in \ker(\phi) \iff P(0) = P(1) = \cdots = P(p) = 0$, donc P admet $p+1$ racines distinctes (tous les entiers de 0 à p). Comme P est de degré inférieur ou égal à p, P est le polynôme nul.

<u>Conclusion :</u> ϕ est linéaire, injective, $\dim(\mathbb{R}_p[X]) = \dim(\mathbb{R}^{p+1}) = p+1$, donc on peut utiliser le théorème du rang pour déduire que ϕ est bijective.

(b) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a\,u_n + P(n)$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a\,u_n + Q(n)$. En particulier pour tous les entiers $k \in [\![0,p]\!]$, on a $P(k) = Q(k) = u_{k+1} - a\,u_k$. P et Q ont donc même image par φ ; comme φ est injective on en déduit $P = Q$.

2. On montre que $E_a^{(p)}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: la suite nulle appartient à $E_a^{(p)}$, il suffit de prendre $P = 0$.
Soient à présent λ un réel quelconque, et deux suites u et v de $E_a^{(p)}$:
$u \in E_a^{(p)}$, donc il existe $P_u \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a\,u_n + P_u(n)$ de même il existe $P_v \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = a\,v_n + P_v(n)$.
On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda\,u_{n+1} + v_{n+1} = a\,(\lambda\,u_n + v_n) + \underbrace{(\lambda\,P_u(n) + P_v(n))}_{(\lambda\,P_u+P_v)(n)}$; or $\lambda\,P_u + P_v \in \mathbb{R}_p[X]$ donc $\lambda\,u + v$ appartient à $E_a^{(p)}$. $E_a^{(p)}$ est inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, non vide, stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et par conséquent, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. Le calcul précédent montre que le polynôme associé à la suite $\lambda\,u + v$ est le polynôme $\lambda\,P_u + P_v$, on a donc : $\forall (u,v) \in \left(E_a^{(p)}\right)^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \theta(\lambda\,u + v) = \lambda\,\theta(u) + \theta(v)$. θ est bien une application linéaire.

4. $u \in \ker(\theta) \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a\,u_n$ donc $\ker(\theta)$ est l'ensemble des suites géométriques de raison a (droite vectorielle engendrée par la suite y).

5. (a) $\deg(X+1)^k) = k$, $\deg(a\,X^k) \leqslant k$, donc $\deg(Q_k) \leqslant k$. D'autre part le coefficient de X^k vaut $1-a$, comme $a \neq 1$, Q_k est de degré k exactement.

(b) Les polynômes $Q_0,\dots,Q_p$ sont de degrés tous distincts, ils forment donc une famille libre ; comme le cardinal de cette famille vaut $p+1 = \dim(\mathbb{R}_p[X])$, c'est bien une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

(c) Prenons la suite $x^{(k)}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n^{(k)} = n^k$. On a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1}^{(k)} - a\,x_n^{(k)} = Q_k(n)$, donc $\theta(x^{(k)}) = Q_k$, et $Q_k \in \mathrm{Im}(\theta)$.

(d) La famille $(Q_0,\dots,Q_p)$ est une famille de vecteurs de $\mathrm{Im}(\theta)$ donc $\mathrm{Vect}(Q_0,\dots,Q_p) \subset \mathrm{Im}(\theta)$ mais c'est aussi une base de $\mathbb{R}_p[X]$, donc $\mathbb{R}_p[X] \subset \mathrm{Im}(\theta)$; par conséquent $\mathrm{Im}(\theta) = \mathbb{R}_p[X]$ et θ est surjective.

6. Montrons que $E_a^{(p)}$ admet une famille génératrice finie : on vient de voir que θ est surjective, choisissons un antécédent pour chacun des polynômes $(Q_0,\dots,Q_p)$ (qui forment une base de $\mathrm{Im}(\theta)$), par exemple les $x^{(k)}$ définis à la question précédente. Soit $(u) \in E_a^{(p)}$, $\theta(u)$ s'exprime comme combinaison linéaire de $(Q_0,\dots,Q_p)$ donc $\exists(\alpha_0,\dots,\alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tels que $\theta(u) = \alpha_0\,Q_0 + \cdots + \alpha_p\,Q_p$.
Par conséquent $\theta\big(u - (\alpha_0\,x^{(0)} + \cdots + \alpha_p\,x^{(p)})\big) = 0$ donc $u - (\alpha_0\,x^{(0)} + \cdots + \alpha_p\,x^{(p)}) \in \mathrm{Ker}(\theta)$; comme $\mathrm{Ker}(\theta) = \mathrm{Vect}(y)$ il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $u = \alpha_0\,x^{(0)} + \cdots + \alpha_p\,x^{(p)} + \beta\,y$.
La famille $\big(x^{(0)},\ \dots,\ x^{(p)},\ y\big)$ engendre $E_a^{(p)}$ qui est donc bien un espace de dimension finie.
$\mathrm{Ker}(\theta)$ est de dimension 1, donc d'après le théorème du rang, $E_a^{(p)}$ est un espace vectoriel de dimension égale à 1 plus celle de $\mathbb{R}_p[X]$, soit $p+2$.

7. La famille $\left(x^{(0)},\dots,x^{(p)}\right)$ a pour image par θ la famille $(Q_0,\dots,Q_p)$ qui est libre (en tant que base de $\mathbb{R}_p[X]$), c'est donc une famille libre. On vérifie ensuite que $y \notin \mathrm{Vect}\left(x^{(0)},\dots,x^{(p)}\right)$: supposons qu'il existe des réels $\alpha_0,\dots,\alpha_p$ tels que $y = \alpha_0\,x^{(0)} + \cdots + \alpha_p\ x^{(p)}$, c'est à dire :
$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \alpha_0\,x_n^{(0)} + \cdots + \alpha_p\,x_n^{(p)}$. Les α ne sont pas tous nuls sinon y serait la suite nulle ; en appliquant θ, on obtient : $\theta(y) = 0 = \alpha_0\,\theta\big(x^{(0)}\big) + \cdots + \alpha_p\,\theta\big(x^{(p)}\big) = \alpha_0\,Q_0 + \cdots + \alpha_p\,Q_p$, ce qui est impossible puisque la famille $(Q_0,\dots,Q_p)$ est libre.
Conclusion : $\left(x^{(0)},\dots,x^{(p)}\right)$ est libre, $y \notin \mathrm{Vect}\left(x^{(0)},\dots,x^{(p)}\right)$, donc la famille $\left(x^{(0)},\dots,x^{(p)},y\right)$ est libre ; elle est de cardinal $p+2$ donc c'est une base de $E_a^{(p)}$.

8. La suite u cherchée appartient à $E_2^{(1)}$, dont une base est constituée des suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Donc il existe des réels α, β, γ, indépendants de n, tels que l'on ait : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha + \beta\, n + \gamma\, 2^n$.
En particulier, pour $n = 0$: $u_0 = -2 = \alpha + 0 + \gamma$
pour $n = 1$: $u_1 = 2\,u_0 - 0 + 7 = 3 = \alpha + \beta + 2\,\gamma$
pour $n = 2$: $u_2 = 2\,u_1 - 2 + 7 = 11 = \alpha + 2\,\beta + 4\,\gamma$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -5 + 2\,n + 3 \times 2^n}$$

Partie C : Le cas où $a = 1$

1. On reprend les résultats établis à la partie B, en regardant s'ils dépendent ou pas de la valeur de a :
La linéarité de φ, l'existence et l'unicité de P_u ne dépendent pas de a ; $E_1^{(p)}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et l'application θ est linéaire.
Noyau de θ : $u \in \ker(\theta) \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$ donc $\ker(\theta)$ est l'ensemble des suites constantes (droite vectorielle engendrée par la suite x).
Degré de Q_k : Q_0 est le polynôme nul, et pour $k \geqslant 1$, Q_k est de degré $k-1$; la famille $\left(Q_1, \ldots, Q_{p+1}\right)$ est libre et c'est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.
Surjectivité de θ : pour tout $k \geqslant 1$, Q_k est l'image par θ de la suite $\left(x^{(k+1)}\right)$, donc θ est surjective.
On conclut donc comme pour le cas $a \neq 1$, que $E_1^{(p)}$ est de dimension $p+2$, et une base de $E_1^{(p)}$ est constituée des suites $x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}, x^{(p+1)}, x$

$$\boxed{E_1^{(p)} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ /\ \exists(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+2},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha_0\, x_n + \cdots + \alpha_{p+1}\, x_n^{(p+1)}\right\}}$$

2. La suite u cherchée appartient à $E_1^{(1)}$, dont une base est constituée des suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Donc il existe des réels α, β, γ, indépendants de n, tels que l'on ait : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha + \beta\, n + \gamma\, n^2$.
En particulier, pour $n = 0$: $u_0 = -2 = \alpha$
pour $n = 1$: $u_1 = u_0 - 0 + 1 = -1 = \alpha + \beta + \gamma$
pour $n = 2$: $u_2 = u_1 - 6 + 1 = -6 = \alpha + 2\,\beta + 4\,\gamma$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -2 + 4\,n - 3\,n^2}$$

$\boxed{\text{PROBLEME N°2}}$

1. **Diagonalisation de u**

   (a) Calcul de Ker $(u + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{E}})$:

   $$\vec{X} = (x, y, z) \in \text{Ker}\ (u + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) \iff \left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & -4 & -2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

   $$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5\,x & + & y & + & z & = & 0\\ x & + & 5\,y & - & z & = & 0\\ 4\,x & - & 4\,y & + & 2\,z & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 5\,x & + & y & + & z & = & 0 & \\ 6x & + & 6\,y & & & = & 0 & L_1 + L_2\\ 6\,x & + & 6\,y & & & = & 0 & 2\,L2 + L_3\end{array}\right.$$

   $$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y\\ z & = & 4\,y\end{array}\right. \quad \text{Ainsi Ker}\ \ (u + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) = \text{Vect}\,(-\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 4\,\overrightarrow{e_3})$$

   $-\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 4\,\overrightarrow{e_3}$ n'est pas le vecteur nul, il constitue une famille libre donc une base de Ker $(u - \mathrm{id}_{\mathbb{E}})$.

   Calcul de Ker $(u - \mathrm{id}_{\mathbb{E}})$:

   $$\vec{X} = (x, y, z) \in \text{Ker}\ (u - \mathrm{id}_{\mathbb{E}}) \iff \left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & -4 & -2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

   $$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0\\ x & - & y & - & z & = & 0\\ 4\,x & - & 4\,y & - & 4\,z & = & 0\end{array}\right. \iff x = y + z, \text{d'où Ker}\ \ (u - \mathrm{id}_{\mathbb{E}}) = \text{Vect}\,(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}\,,\, \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})$$

   Les vecteurs $\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$ et $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ ne sont pas colinéaires, il forment donc une famille libre, et par conséquent une base de Ker $(u - \mathrm{id}_{\mathbb{E}})$.

   $$\boxed{\text{Ker}\ \ (u + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) = \text{Vect}\,(-\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 4\,\overrightarrow{e_3}) \quad , \quad \text{Ker}\ \ (u - \mathrm{id}_{\mathbb{E}}) = \text{Vect}\,(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}\,,\, \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})}$$

   (b) Notons $\overrightarrow{e_1'}$ le vecteur de base de Ker $(u + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{E}})$; $\overrightarrow{e_2'}$ et $\overrightarrow{e_3'}$ les vecteurs de la base de Ker $(u - \mathrm{id}_{\mathbb{E}})$ $\left(\overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}\right)$ est libre en tant que base de Ker $(u - \mathrm{id}_{\mathbb{E}})$; de plus $\overrightarrow{e_1'} \notin \text{Vect}\left(\overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}\right)$, donc la famille $\left(\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}\right)$ est libre. Comme elle est de cardinal 3 c'est une base de $\mathbb{E}$.

   On a vu que $u(\overrightarrow{e_1'}) = -2\,\overrightarrow{e_1'}$, $u(\overrightarrow{e_2'}) = \overrightarrow{e_2'}$ et $u(\overrightarrow{e_3'}) = \overrightarrow{e_3'}$ donc la matrice de u dans cette base est bien $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. **Recherche des racines carrées de u**

   (a) i. On a $u \circ v = (v \circ v) \circ v = v \circ v (\circ v) = v \circ u$.

   ii. D'après la question précédente, $u\left(v\left(\overrightarrow{e_1'}\right)\right) = v\left(u\left(\overrightarrow{e_1'}\right)\right) = v\left(-2\,\overrightarrow{e_1'}\right) = -2\,v\left(\overrightarrow{e_1'}\right)$.

   On en déduit que $v\left(\overrightarrow{e_1'}\right) \in \text{Ker}\ \ (u + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{e_1'}\right)$ donc $v\left(\overrightarrow{e_1'}\right)$ et $\overrightarrow{e_1'}$ sont colinéaires.

   iii. De même que pour $\overrightarrow{e_1'}$, on a pour $i = 2$ ou 3 : $u\left(v\left(\overrightarrow{e_i'}\right)\right) = v\left(u\left(\overrightarrow{e_i'}\right)\right) = v\left(\overrightarrow{e_i'}\right)$

   On en déduit que $v\left(\overrightarrow{e_i'}\right) \in \text{Ker}\ \ (u - \mathrm{id}_{\mathbb{E}}) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}\right)$.

   iv. $v(\overrightarrow{e_1'})$ et $\overrightarrow{e_1'}$ sont colinéaires, donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $v(\overrightarrow{e_1'}) = a\,\overrightarrow{e_1'}$.

   De même $v\left(\overrightarrow{e_2'}\right) \in \text{Vect}\left(\overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}\right)$ donc il existe $(x, z) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v\left(\overrightarrow{e_2'}\right) = x\,\overrightarrow{e_2'} + z\,\overrightarrow{e_3'}$.

   Enfin $v\left(\overrightarrow{e_3'}\right) \in \text{Vect}\left(\overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}\right)$ donc il existe $(y, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v\left(\overrightarrow{e_3'}\right) = y\,\overrightarrow{e_2'} + t\,\overrightarrow{e_3'}$.

   La matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ est donc $\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & x & y\\ 0 & z & t\end{pmatrix}$.

v. Si $v \circ v = u$, alors $\mathcal{M}\mathrm{at}\,(v, \mathcal{B}') \times \mathcal{M}\mathrm{at}\,(v, \mathcal{B}') = \mathcal{M}\mathrm{at}\,(u, \mathcal{B}')$, donc par identification des coefficients, on a $a^2 = -2$.

(b) Il n'existe pas d'endomorphisme v tel que $v \circ v = u$ car il n'existe aucun réel de carré -2.

3. (a) i. Les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $u(\overrightarrow{e_1})$ ne sont pas colinéaires donc la famille $\big(\overrightarrow{e_1},\, u(\overrightarrow{e_1})\big)$ est libre.

ii. $\overrightarrow{x}$ de coordonnées $(a,b,c) \in \mathrm{Vect}\big(\overrightarrow{e_1}, u\,(\overrightarrow{e_1})\,\big)$ $\iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{x} = \alpha\,\overrightarrow{e_1} + \beta\, u\,(\overrightarrow{e_1})$.

$$\iff \overrightarrow{x} = \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{e_1} + \frac{\beta}{2}\,\overrightarrow{e_2} + 2\,\beta\,\overrightarrow{e_3}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \frac{\beta}{2} & = & a \\ & & \frac{\beta}{2} & = & b \\ & & 2\,\beta & = & c \end{array}\right. \iff 4\,b - c = 0$$

Donc si $4\,b - c = 0$, $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}\big(\overrightarrow{e_1}, u\,(\overrightarrow{e_1})\,\big)$, donc la famille $\big(\overrightarrow{e_1},\, u\,(\overrightarrow{e_1})\,,\, \overrightarrow{x}\big)$ est liée
et si $4\,b - c \neq 0$, $\overrightarrow{x} \notin \mathrm{Vect}\big(\overrightarrow{e_1}, u\,(\overrightarrow{e_1})\,\big)$, comme la famille $\big(\overrightarrow{e_1},\, u\,(\overrightarrow{e_1})\,\big)$ est libre, la famille $\big(\overrightarrow{e_1},\, u\,(\overrightarrow{e_1})\,,\, \overrightarrow{x}\big)$ est également libre.
Une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{E}$ est une base si et seulement si elle est libre, donc en conclusion :

$$\boxed{\big(\overrightarrow{e_1},\, u\,(\overrightarrow{e_1})\,,\, \overrightarrow{x}\big) \text{ est une base de } \mathbb{E} \iff 4\,b - c \neq 0}$$

iii. Il suffit de constater que les coordonnées de $\overrightarrow{e_1"}$ ne vérifient pas l'équation $4\,b - c = 0$, ainsi $\big(\overrightarrow{e_1},\, u\,(\overrightarrow{e_1})\,,\, \overrightarrow{e_1"}\big)$ est bien une base de $\mathbb{E}$.

iv. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et son inverse est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

La matrice $A"$ est alors donnée par $A" = P^{-1} A\, P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) i. $\mathcal{M}\mathrm{at}(f, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $f\big((0,1)\big) = (-1, 1)$; on constate que $(0,1)$ et $f\big((0,1)\big)$ ne sont pas colinéaires donc forment une base de $\mathbb{R}^2$.
La matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$ est $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, son inverse est $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

ii. On a alors $\mathcal{M}\mathrm{at}(f, \mathcal{C}') = Q^{-1} \times \mathcal{M}\mathrm{at}(f, \mathcal{C}) \times Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) i. On peut faire un calcul direct de R^{-1} qui prouve par la même occasion que R est inversible ; toutefois on peut aussi faire le raisonnement suivant : les deux dernières colonnes de R ne sont pas proportionnelles (sinon les deux dernières de $\mathcal{M}\mathrm{at}(f, \mathcal{C}')$ le seraient) de plus $(1,0,0) \notin \mathrm{Vect}\big((0,0,1),\, (0,1,0)\big)$ est évident, donc la matrice R est inversible.

Ce raisonnement ne dispense pas du calcul de R^{-1} : $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

ii. $R^{-1} A"\, R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *on peut aussi faire un calcul par blocs.*

(d) A est semblable à A'' ; A'' est semblable à $A''' = R^{-1} A''\, R$, donc A est semblable à A''' dont la diagonale est nulle.
Remarquons de la matrice de passage pour passer de A à A''' est égale à $P\,R$:
$A'' = P^{-1} A\, P,\ A''' = R^{-1} A''\, R$ d'où $A''' = R^{-1}\left(P^{-1} A\, P\right) R = (P\,R)^{-1} A\,(P\,R)$