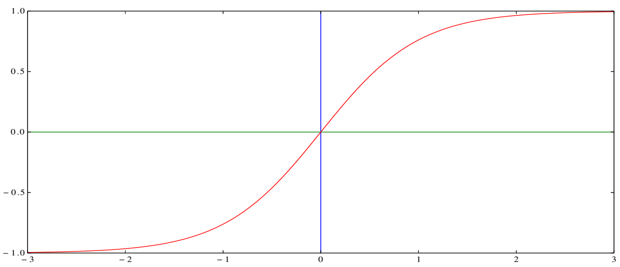
Corrigé du devoir surveillé n^o 1

Préliminaires

1. sh et ch sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables (et même $\mathscr{C}^\infty$) ; de plus ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (somme d'exponentielles) dont la fonction th est également définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)\,,\ \mathrm{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)\,,$ et $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{\mathrm{sh}'(x)\times\mathrm{ch}(x) - \mathrm{ch}'(x)\times\mathrm{sh}(x)}{\big(\mathrm{ch}(x)\big)^2}$
$\mathrm{th}'(x) = \dfrac{\big(\mathrm{ch}(x)\big)^2 - \big(\mathrm{sh}(x)\big)^2}{\big(\mathrm{ch}(x)\big)^2} = \dfrac{\big(\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)\big)\,\big(\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x)\big)}{\big(\mathrm{ch}(x)\big)^2} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$; en résumé :
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)\,,\ \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \text{ et } \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)}$$
2. $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$, nous venons de l'établir pour le calcul de th$'$.
3. $$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y) + \mathrm{ch}(y)\,\mathrm{sh}(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\times\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)\times\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{-x-y} - e^{x-y} + e^{y+x} + e^{-y+x} - e^{y-x} - e^{-y-x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{x+y} - e^{-x-y}\right) = \mathrm{sh}(x+y)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(y)\,\mathrm{sh}(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\times\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)\times\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\\ &\frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{-x+y} + e^{-x-y} + e^{x-y} + e^{y+x} - e^{-y+x} - e^{y-x} + e^{-y-x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{x+y} + e^{-x-y}\right) = \mathrm{ch}(x+y)\end{aligned}$$
$$\mathrm{th}(x+y) = \frac{\mathrm{sh}(x+y)}{\mathrm{ch}(x+y)} = \frac{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y) + \mathrm{ch}(y)\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(y)\,\mathrm{sh}(x)} = \frac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}$$
On a donc bien établi les formules données.
Remarque : ces formules peuvent se retrouver facilement à partir des formules de trigonométrie en remarquant que $\mathrm{ch}(x) = \cos(i\,x)$, $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\sin(i\,x)}{i}$ et donc $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\tan(i\,x)}{i}$.

Partie A : Définition d'une fonction

1. On a vu dans les préliminaires que th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$ donc c'est une fonction strictement croissante.
Lorsque $x \to +\infty$, $e^{-x} = o(e^x)$ donc $e^x - e^{-x} \sim e^x$ et $e^x + e^{-x} \sim e^x$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1$.
De même lorsque $x \to -\infty$, $e^x = o(e^{-x})$ donc $e^x - e^{-x} \sim -e^{-x}$ et $e^x + e^{-x} \sim e^{-x}$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$.
Remarque : on pouvait éviter le calcul en $-\infty$ en remarquant que th est impaire.



2. th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement égales à -1 et 1, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\boxed{I =]-1\,,\,1\,[}$

3. argth réalise une bijection de $I =]-1\,,\,1\,[$ dans $\mathbb{R}$, de même sens de variation que th, donc strictement croissante.
Soit $x \in I$: $\exists y \in \mathbb{R}$, $x = \operatorname{th}(y)$ (y est unique et est égal à $\operatorname{argth}(x)$).
$\operatorname{argth}(-x) = \operatorname{argth}\big(-\operatorname{th}(y)\big) = \operatorname{argth}\big(\operatorname{th}(-y)\big)$ car th est impaire.
Or $\forall z \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argth}\big(\operatorname{th}(z)\big) = z$ car argth est la bijection réciproque de th.
On en déduit $\operatorname{argth}(-x) = \operatorname{argth}\big(\operatorname{th}(-y)\big) = -y$ et par suite $\operatorname{argth}(-x) = -y = -\operatorname{argth}(x)$

$$\boxed{\text{Ce résultat est valable quel que soit } x \in I \text{ donc on a prouvé que argth est une fonction impaire}}$$

4. La dérivée de la fonction th ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc argth est dérivable sur I et l'on a :
$\forall x \in I,\ \operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{th}'\big(\operatorname{argth}(x)\big)} = \dfrac{1}{1-\operatorname{th}^2\big(\operatorname{argth}(x)\big)} = \dfrac{1}{1-x^2}$

$$\boxed{\forall x \in I,\ \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}}$$

5. $\forall x \in I,\ \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2\,(1+x)} + \dfrac{1}{2\,(1-x)}$ donc $\forall x \in I$, $\operatorname{argth}(x) - \operatorname{argth}(0) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t$
$= \left[\dfrac{1}{2}\Big(\ln(1+t) - \ln(1-t)\Big)\right]_0^x = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$ *(la valeur absolue n'est pas nécessaire puisque $x \in]-1\,,\,1[$).*

$$\boxed{\forall x \in I,\ \operatorname{argth}(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)}$$

Partie B : Étude d'une équation fonctionnelle

1. Soit g une fonction constante solution de $(*)$, il existe donc une constante réelle K telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = K$.
On a alors $K = \dfrac{2\,K}{1+K^2}$ d'où $K\,(1+K^2) = 2\,K$ ce qui donne $K \in \{0\,;\,-1\,;\,1\}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les fonctions constantes solution de } (*) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont :}\\ \text{la fonction nulle, la fonction constante égale à 1 et la fonction constante égale à } -1\end{array}}$$

2. Soit g une fonction solution de $(*)$, en prenant $x = 0$ on obtient $g(0) = \dfrac{2\,g(0)}{1+\big(g(0)\big)^2}$, d'où $g(0) \in \{0\,;\,-1\,;\,1\}$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \dfrac{2\,t}{1+t^2} \leqslant 1 \iff -1-t^2 \leqslant 2\,t \leqslant 1+t^2$ *(car $1+t^2 > 0$ pour tout t)*
Or $1+t^2-2\,t = (t-1)^2 \geqslant 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R},\ 2\,t \leqslant 1+t^2$, de même $-1-t^2-2\,t = -(t+1)^2 \leqslant 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R},\ -1-t^2 \leqslant 2\,t$. On a donc établi :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \frac{2\,t}{1+t^2} \leqslant 1}$$

Soit g une solution de $(*)$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ g(2\,x) = \dfrac{2\,g(x)}{1+g(x)^2}$ donc en posant $g(x) = t$, on déduit que $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant g(2\,x) \leqslant 1$ donc g est bornée par -1 et 1.

$$\boxed{\text{Toute fonction } g \text{ solution de } (*) \text{ vérifie } \forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant g(x) \leqslant 1}$$

4. D'après les propriétés établies aux préliminaires, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th}(2\,x) = \operatorname{th}(x+x) = \dfrac{2\operatorname{th}(x)}{1+\operatorname{th}^2(x)}$ donc la fonction th est solution de $(*)$.

Partie C : Résolution de (*) avec $g(0) = \pm 1$

1. La suite de terme général $\frac{x_0}{2^n}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc elle converge vers 0 ; g est continue en 0 donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = g(0) = 1}$$

2. $u_n = g\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = g\left(2\,\dfrac{x_0}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{2\,g\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)}{1+\left(g\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)\right)^2} = \dfrac{2\,u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2\,u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}}$$

$1+u_{n+1}^2$ est toujours strictement positif donc u_{n+1} et u_n sont de même signe et par une récurrence immédiate, on déduit que la suite (u) garde un signe constant.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_{n+1}(1+u_{n+1}^2) - 2\,u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2} = \dfrac{u_{n+1}(u_{n+1}^2 - 1)}{1+u_{n+1}^2}$

Comme g est bornée par -1 et 1 (partie B question 3) u_{n+1} est également comprise entre -1 et 1 donc $(u_{n+1}^2 - 1)$ est toujours négatif.

Il en résulte que $u_{n+1} - u_n$ est du signe opposé de u_n, donc du signe opposé de u_0 ; finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l} u_0 > 0 \iff (u) \text{ est décroissante} \\ u_0 < 0 \iff (u) \text{ est croissante} \\ u_0 = 0 \iff (u) \text{ est constante égale à la suite nulle} \end{array}}$$

3. On remarque d'abord que $u_0 \in [-1, 1[$ car $u_0 = g(x_0) \neq g(0) = 1$.
   On a montré précédemment que la suite (u) converge vers 1, donc :
   • on ne peut pas avoir $u_0 = 0$, car la suite est constante égale à 0 et ne peut converger vers 1.
   • on ne peut pas avoir $0 < u_0 < 1$, car la suite est alors décroissante et ne peut converger vers 1.
   • on ne peut pas avoir $-1 \leqslant u_0 < 0$, car la suite est alors toujours négative, ce qui est aussi en contradiction avec la convergence vers 1.
4. Si on suppose que $g(0) = -1$, alors la fonction $-g$ est aussi solution de $(*)$ et $-g(0) = 1$, donc les conclusions de la question précédente s'appliquent à la fonction $-g$ donc à la suite $(-u)$.
5. Une fonction solution de $(*)$ et continue en 0, qui ne s'annule pas pour $x = 0$ ne peut être qu'une fonction constante, donc égale à 1 pour tout x ou égale à -1 pour tout x.

Partie D : Résolution de (*) avec $g(0) = 0$

1. On a déjà montré que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant g(x) \leqslant 1$; supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = 1$, on montre alors par récurrence sur n que la suite (u) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = g\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$ est constante égale à 1.
   Par hypothèse, $u_0 = 1$. Soit à présent $n \geqslant 0$; suppposons que $u_n = g\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = 1$; on a alors $u_{n+1} = \dfrac{2\,u_n}{1+u_n^2} = 1$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_0}{2^n} = 0$ et g est continue en 0 (puisque dérivable), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = g(0) = 0$
   On aboutit à une contradiction puisque la suite (u) ne peut converger vers 0 et 1 à la fois.
   Par un raisonnement identique, ou bien en considérant la suite $(-u)$, on montre de la même façon que g ne peut jamais prendre la valeur -1.
   En résumé on a $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \in [-1\,,\,1]$ et g ne prend jamais les valeurs 1 ou -1, on a donc établi que :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \in]-1\,,\,1[}$$
2. On remarque tout d'abord que $\operatorname{argth}\big(g(x)\big)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque argth est définie sur $]-1\,,\,1[$ et que $g\big(\mathbb{R}\big) =]-1\,,\,1[$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, $h(2\,x) = \operatorname{argth}\big(g(2\,x)\big) = \operatorname{argth}\left(\dfrac{2\,g(x)}{1+\big(g(x)\big)^2}\right)$; on compose alors par th qui est bijective :
   $h(2\,x) = \operatorname{argth}\big(g(2\,x)\big) = \operatorname{argth}\left(\dfrac{2\,g(x)}{1+\big(g(x)\big)^2}\right) \iff \operatorname{th}\big(h(2\,x)\big) = g(2\,x) = \dfrac{2\,g(x)}{1+\big(g(x)\big)^2}$; or $g(x) = \operatorname{th}\big(h(x)\big)$
   donc $\operatorname{th}\big(2\,h(x)\big) = \dfrac{2\operatorname{th}\big(h(x)\big)}{1+\operatorname{th}\big(h(x)\big)^2} = \operatorname{th}\big(2\,h(x)\big)$, d'après la formule d'addition établie en préliminaire.
   On compose alors par argth qui est bijective et on obtient $h(2\,x) = 2\,h(x)$, ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. La fonction g est dérivable en 0 par hypothèse, argth est dérivable sur $]-1\,,1[$ donc en $g(0)=0$, (prouvé partie A) donc h est dérivable en 0 comme composée de fonctions dérivables.
   De plus $h'(0)=g'(0)\times \operatorname{argth}'\big(g(0)\big)=g'(0)$.

4. Soit $x\in\mathbb{R}^*$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{2^n}=0$; h est dérivable en 0 et $h(0)=0$; on remarque alors que $\dfrac{h\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$ est le taux de variation de la fonction h entre 0 et $\dfrac{x}{2^n}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{h\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}=h'(0)=g'(0)$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^* \text{ la suite } (v) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} v_n=g'(0)}$$

5. On a montré que $\forall x\in\mathbb{R}, h(2\,x)=2\,h(x)$; on en déduit $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\dfrac{2\,h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^n}}=v_{n+1}$
   La suite (v) est donc constante égale à $g'(0)$, et ce quel que soit $x\in\mathbb{R}^*$; par conséquent :
   $\forall x\in\mathbb{R}^*, v_0=\dfrac{h(x)}{x}=g'(0)$ c'est à dire $\forall x\in\mathbb{R}^*, h(x)=g'(0)\times x$. Comme $h(0)=0$, on obtient $\forall x\in\mathbb{R}, h(x)=g'(0)\times x$; h est une fonction affine avec $\alpha=g'(0)$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=g'(0)\,x}$$

Partie E : Conclusion

Soit g une fonction solution de $(*)$, dérivable en 0 :

- ⋆ $g(0)$ vaut nécessairement 1, -1 ou 0 (partie B).
- ⋆ Si $g(0)=1$ ou -1, par continuité de g en 0, on montre que g est constante (égale à 1 ou -1) sur $\mathbb{R}$ (partie C).
- ⋆ g est bornée sur $\mathbb{R}$ par -1 et 1, plus précisément $\forall x\in\mathbb{R},\ -1\leqslant g(x)\leqslant 1$.
- ⋆ Si $g(0)=0$, alors g est de la forme $x\mapsto \operatorname{th}\big(\alpha\,x\big)$ où α est une constante réelle (partie D).
- ⋆ Les fonctions constantes solutions de $(*)$ sont la fonction nulle et les fonctions constantes égales à 1 ou -1 *(on retrouve la fonction nulle en prenant $\alpha=0$).*

  Finalement les solutions de $(*)$ dérivables en 0 sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} & ; & \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} & ; & \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ x\longmapsto 1 & & x\longmapsto -1 & & x\longmapsto \frac{e^{\alpha\,x}-e^{-\alpha\,x}}{e^{\alpha\,x}+e^{-\alpha\,x}}\ ,\alpha\in\mathbb{R}\end{array}}$$

Corrigé du devoir d'informatique

EXERCICE 1

n n'est égal ni à 0 ni à 1 donc on exécute le *else* : $k = 0$ donne $a = b = c = 1$, ensuite $k = 1$ renvoie $a = -1$, $b = c = 1$, par conséquent $\boxed{U(4) = -1}$

Remarque : cette fonction calcule le $n$ième terme de la suite linéaire récurrente définie par : $u_0 = 2$, $u_1 = u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3\,u_{n+2} - 6\,u_{n+1} + 2\,u_n$, mais ce n'était pas demandé.

EXERCICE 2

- f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, donc f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (voir exercice n° 18 de la feuille d'analyse).
- Pour tracer la réciproque de f, on utilise la propriété selon laquelle les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice donc il suffit d'échanger abscisse et ordonnée.

```
def Dessin(a,b):
    x=linspace(a,b,int(100*(b-a)))
    plot(x,x**3+x)
    plot(x**3+x,x)
```

-
```
def Reciproquef(x,epsilon):
    a=0; b=x; y=f((a+b)/2)
    while abs(y-x)>epsilon:
        if abs(y)>abs(x):
            b=(a+b)/2
        else:
            a=(a+b)/2
        y=f((a+b)/2)
    return((a+b)/2,f((a+b)/2))
```

EXERCICE 3

```
def Titi(n):
    Liste=[]
    for a in range(n-4):
        for b in range(n-a-3):
            for c in range(n-a-b-2):
                for d in range(n-a-b-c-1):
                    if a+b+c+d<n-4:
                        Liste.append([a+1,b+1,c+1,d+1,n-4-a-b-c-d])
    return(Liste,len(Liste))
```

EXERCICE 4

```
def fonction(n,x):
    return(x**n*(x-1))

def Toto(n):
    a=0.2;b=1.7;N=200;x=linspace(a,b,200);L=len(x)
    A=1;B=2;epsilon=0.001
    while B-A>epsilon:
        C=(A+B)/2
        F=fonction(n,C)
        if F<1:
            A=C
        else:
            B=C
    L=len(x)
    pyplot.plot(x,ones(L),'r')
    pyplot.plot(x,fonction(n,x),'b')
    pyplot.plot(x,fonction(n+1,x),'g')
    return(C,F)
```