# Corrigé du devoir n$^o$ 7

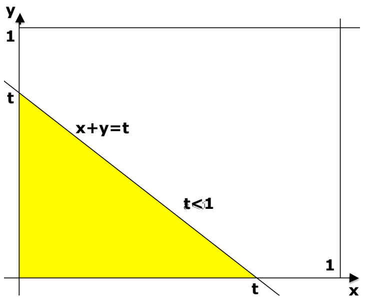
## Exercice 1

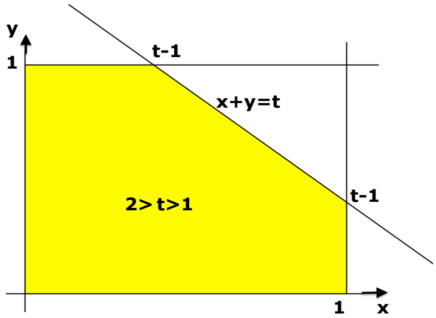
**Première situation**

1. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes, donc une densité du couple est donnée par le produit des densités de $X$ et $Y$, soit :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 1 \text{ si } (x,y) \in [0,1]^2 \text{ et } 0 \text{ sinon.}}$$

2. • cas $t < 0$ : $[S \leqslant t] \subset [S < 0] = \varnothing$, donc $P(S \leqslant t) = 0$.



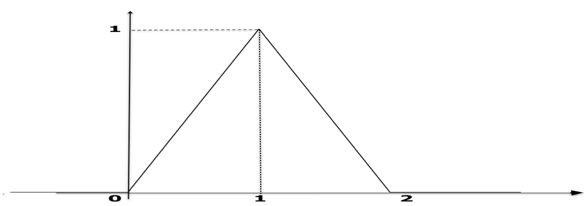




   • cas $0 \leqslant t < 1$ : $P(S \leqslant t)$ est l'aire du triangle grisé à gauche, donc $P(S \leqslant t) = \dfrac{t^2}{2}$.
   • cas $1 \leqslant t < 2$ : $P(S \leqslant t)$ est l'aire du domaine grisé à droite, donc $P(S \leqslant t) = 1 - \dfrac{(2-t)^2}{2}$.
   • cas $t \geqslant 2$ : $[S \leqslant t] \supset [S \leqslant 2] = \Omega$, donc $P(S \leqslant t) = 1$.

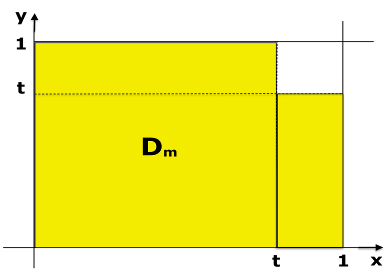
$$\boxed{F_S(t) = P(S \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{t^2}{2} & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ -\dfrac{t^2}{2} + 2t - 1 & \text{si } 1 \leqslant t < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leqslant t \end{cases}}$$

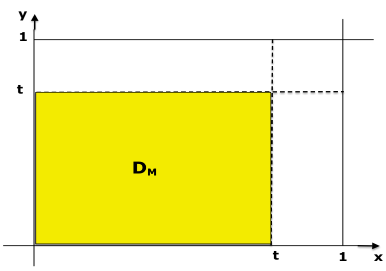
3. On constate que la fonction de répartition $F_S$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$, $]1,2[$ et $]2,+\infty[$ et continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $S$ est une variable à densité, dont une densité est obtenue par dérivation de $F_S$ en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0,1,2\}$.

$$\boxed{f_S(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 2-t & \text{si } 1 < t \leqslant 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$




4. $U$ et $V$ dont à valeurs dans $[0,1]$ ; soit $t \in [0,1]$ :
   On représente les domaines $D_m(t) = \big\{(x,y) \in [0,1]^2,\ \min(x,y) \leqslant t\big\}$ et $D_M(t) = \big\{(x,y) \in [0,1]^2,\ \max(x,y) \leqslant t\big\}$



$P(\min(X,Y) \leqslant t)$ est l'aire du domaine $D_m(t)$, donc $F_U(t) = P(\min(X,Y) \leqslant t) = 1-(1-t)^2$ ; de même $P(\max(X,Y) \leqslant t)$ est l'aire du domaine $D_M(t)$, donc $F_V(t) = P(\max(X,Y) \leqslant t) = t^2$ ; finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 2\,t - t^2 & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t>1 \end{cases} \quad \text{et } F_V(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ t^2 & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t>1 \end{cases}$$

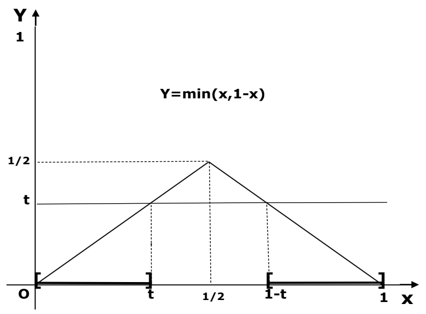
On en déduit donc des densités de $U$ et $V$ :

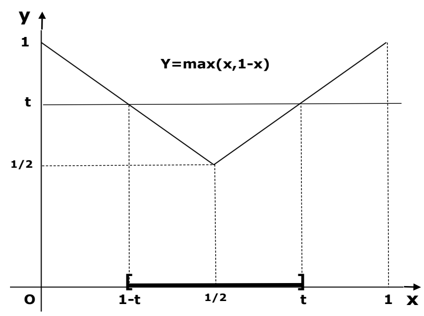
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_U(t) = \begin{cases} 2\,(1-t) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } f_V(t) = \begin{cases} 2\,t & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Deuxième situation**

1. On détermine $F_Y$, la fonction de répartition de $Y$ : soit $t \in \mathbb{R}$
   $\big[Y \leqslant t\big] = \big[X \geqslant 1-t\big] = \big[X > 1-t\big]$ car $X$ est une variable à densité ; donc $F_Y(t) = 1 - F_X(1-t)$.
   - Si $t<0$, alors $1-t>1$, $F_X(1-t) = 1$ donc $F_Y(t) = 0$.
   - Si $t \in [0,1]$, alors $1-t \in [0,1]$, $F_X(1-t) = 1-t$ donc $F_Y(t) = 1-(1-t) = t$.
   - Si $t>1$, alors $1-t <$, $F_X(1-t) = 0$ donc $F_Y(t) = 1$.

   $F_Y$ et $F_X$ sont égales, donc $X$ et $Y$ suivent la même loi, $\mathcal{U}_{[0,1]}$.
2. $Y = 1-X$ donc $X+Y$ est une variable certaine égale à 1.
3. (a) $\min(x,1-x) = x \iff x \leqslant 1-x$ c'est à dire si $x \leqslant \frac{1}{2}$, et donc $\min(x,1-x) = 1-x \iff x \geqslant \frac{1}{2}$.
   $\max(x,1-x) = x \iff x \geqslant 1-x$ c'est à dire si $x \geqslant \frac{1}{2}$, et donc $\max(x,1-x) = 1-x \iff x \leqslant \frac{1}{2}$.




   (b)

| L'ensemble des solutions dans $[0,1]$ de $\min(x,1-x) \leqslant t$ est |
|---|
| • $\varnothing$ si $t<0$ |
| • La réunion des deux segments $[0,t]$ et $[1-t,1]$ si $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ |
| • Le segment $[0,1]$ si $t > \frac{1}{2}$ |

   (c)

| L'ensemble des solutions dans $[0,1]$ de $\max(x,1-x) \leqslant t$ est |
|---|
| • $\varnothing$ si $t < \frac{1}{2}$ |
| • Le segment $[1-t,t]$ si $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$ |
| • Le segment $[0,1]$ si $t>1$ |

4. On en déduit directement les focntions de répartition de $U$ et $V$ :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 2\,t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } t > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et } F_V(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{2} \\ 2\,t-1 & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t>1 \end{cases}$$

On remarque que $U$ et $V$suivent des lois uniformes : $U \hookrightarrow \mathscr{U}_{[0,\frac{1}{2}]}$ et $V \hookrightarrow \mathscr{U}_{[\frac{1}{2},1]}$, donc

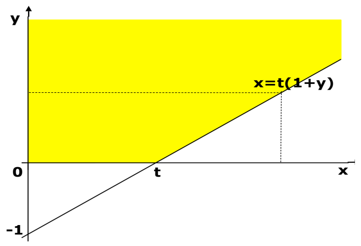
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ f_U(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } f_V(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

# Exercice 2

1. $X$ et $Y$ sont des variables à densité indépendantes, donc une densité $f$ du couple est donnée par le produit des densités de $X$ et de $Y$, soit :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{e}^{-\lambda y} \text{ si } x \text{ et } y \text{ positifs, } 0 \text{ sinon}}$$

2. •




• $P(Z \leqslant t)$ est l'intégrale sur le domaine $D_t$ de la densité du couple $(X,Y)$ :

• $P(Z \leqslant t) = \displaystyle\int_{y=0}^{+\infty} \left( \int_{x=0}^{t(1+y)} \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda(x+y)} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{y=0}^{+\infty} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda y} \left[ \mathrm{e}^{-\lambda x} \right]_0^{t(1+y)} \mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \lambda \left( \mathrm{e}^{-\lambda y} - \mathrm{e}^{-\lambda(ty+y+t)} \right) \mathrm{d}y$

$P(Z \leqslant t) = 1 + \left[ \mathrm{e}^{-\lambda t} \left( 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda y(t+1)}}{t+1} \right) \right]_0^{+\infty} = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{t+1}$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ F_Z(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{t+1} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}}$$

3. Après s'être assuré que $F_Z$ est bien une fonction de répartition (croissante, à valeurs dans $[0,1]$, continue à droite) on vérifie qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ (étude à faire en 0), de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux (sur $\mathbb{R}^*$), donc $Z$ est bien une variable à densité.

   Une densité de $Z$ s'obtient sur $\mathbb{R}^*$ en dérivant $F_Z$, donc $\forall t < 0, f_Z(t) = 0$ et $\forall t > 0, f_Z(t) = \dfrac{\lambda\,(1+t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{(1+t)^2}$

   D'où, en choisissant $f_Z(0) = 0$ par exemple :

$$\boxed{\forall t \leqslant 0, f_Z(t) = 0 \text{ et } \forall t > 0, f_Z(t) = \frac{\big(\lambda\,(1+t)+1\big)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{(1+t)^2}}$$

4. • $P_{[Z>a]}\,(Z > a+t) = \dfrac{P\big(\,[Z > a+t] \cap [Z > a]\,\big)}{P\,(Z > a+t)}$, or $t > 0$, donc $[Z > a+t] \subset [Z > a]$ et $[Z > a+t] \cap [Z > a] = [Z > a+t]$. Par conséquent, $P_{[Z>a]}\,(Z > a+t) = \dfrac{P\big(Z > a+t\big)}{P\,(Z > a)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+a)}}{1+t+a} \times \dfrac{1+a}{\mathrm{e}^{-\lambda a}}$

$$\boxed{P_{[Z>a]}\,(Z > a+t) = \frac{(1+a)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1+t+a}}$$

   • $P\big(Z > t\big) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1+t}$, et $P_{[Z>a]}\,(Z > a+t) - P\big(Z > t\big) = \dfrac{a\,t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{(1+t)\,(1+a+t)} > 0$

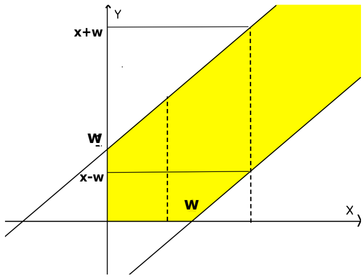
   Conclusion : on vient d'établir $P_{[Z>a]}\,(Z - a > t) > P\big(Z > t\big)$, donc la probabilité que le système n'ait toujours pas subi de panne à l'instant $t + a$ sachant qu'il n'en a pas subi jusqu'à l'instant $a$ est supérieure à la probabilité qu'il fonctionne pendant un temps au moins égal à $t$ à compter de la mise en service.

   Autrement dit, la probabilité de fonctionnement sans panne dans les $t$ prochaines minutes (ou heures ou jours...) augmente en fonction du temps déjà écoulé depuis la mise en service ; la fiabilité du réseau augmente avec le temps.

# Problème

1. (a) $W$ est le temps d'attente entre l'instant de sortie de la première personne et celui de la deuxième ; si $A$ sort avant $B$, alors $W = Y - X$, sinon $W = X - Y$.

   (b) $X$ et $Y$ sont indépendantes, donc une densité $f$ du couple est donnée par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$




Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \in B_\omega \iff -\omega \leqslant y - x \leqslant \omega$

Soit $\omega \in \mathbb{R},\ \omega \leqslant 0 \Longrightarrow \Big[\,|X-Y| \leqslant \omega\,\Big] = \varnothing$ donc $P\Big(|X-Y| \leqslant \omega\Big) = F_W(\omega) = 0$.

Soit $\omega > 0$, $P\Big(|X-Y| \leqslant \omega\Big) = \displaystyle\iint_{B_\omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha^2 \iint_{B_\omega} \mathrm{e}^{-\alpha(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$F_W(\omega) = \alpha^2 \int_{x=0}^{\omega} \mathrm{e}^{-\alpha x}\left(\int_{y=0}^{x+\omega} \mathrm{e}^{-\alpha y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \alpha^2 \int_{x=\omega}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\left(\int_{y=x-\omega}^{x+\omega} \mathrm{e}^{-\alpha y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \alpha \int_{\omega}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha(x+\omega)}\right)\mathrm{d}x + \alpha \int_{\omega}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\left(\mathrm{e}^{-\alpha(x+\omega)} - \mathrm{e}^{-\alpha(x-\omega)}\right)\mathrm{d}x$$

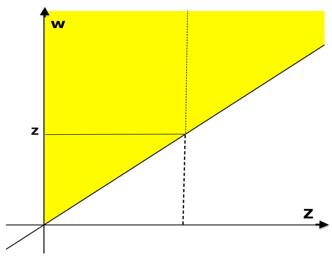
$$= \left[-\mathrm{e}^{-\alpha x} + \frac{\mathrm{e}^{-\alpha(2x+\omega)}}{2}\right]_0^{\omega} + \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-\alpha(2x+\omega)} - \mathrm{e}^{-\alpha(2x-\omega)}\right]_{\omega}^{+\infty} = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha\omega} + \frac{\mathrm{e}^{-3\alpha\omega}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-\alpha\omega}}{2} + \frac{1}{2}\left(-\mathrm{e}^{-3\alpha\omega} + \mathrm{e}^{-\alpha\omega}\right)$$

> $F_W(\omega) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha\omega}$ si $\omega \geqslant 0$ et $F_W(\omega) = 0$ si $\omega < 0$
> $F_W$ est la fonction de répartition d'une variable de loi exponentielle de paramètre $\alpha$, donc $W \hookrightarrow \mathscr{E}(\alpha)$

   (c) $X$, $Y$ et $Z$ sont mutuellement indépendantes, donc $W$ et $Z$ sont indépendantes ; donc une densité du couple $(Z,W)$ est le produit des densités de $Z$ et $W$. Ainsi $\forall (z,\omega) \in \mathbb{R}^2,\ f_{(Z,W)}(z,\omega) = f_Z(z)\,f_W(\omega)$.

> $\forall (z,\omega) \in \mathbb{R}^2,\ f_{(Z,W)}(z,\omega) = \alpha^2 \mathrm{e}^{-\alpha(z+\omega)}$ si $z \geqslant 0$ et $\omega \geqslant 0$ et 0 sinon

   (d)




$$P\big(Z \leqslant W\big) = \int_{\omega=0}^{+\infty}\int_{z=0}^{\omega} \alpha^2 \mathrm{e}^{-\alpha(z+\omega)}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\omega = \alpha \int_{\omega=0}^{+\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\omega}\right)\mathrm{e}^{-\alpha\omega}\mathrm{d}\omega = \left[-\mathrm{e}^{-\alpha\omega} + \frac{\mathrm{e}^{-2\alpha\omega}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

Ce résultat n'est pas surprenant étant donné que $Z$ et $W$ sont indépendantes et suivent la même loi.

$C$ n'est pas le dernier à sortir si et seulement si $Z \leqslant X$ ou $Z \leqslant Y$, c'est à dire, si et seulement si $Z + \min(X,Y) \leqslant \max(X,Y)$. En remarquant que $|X - Y| = \max(X,Y) - \min(X,Y)$, on obtient :
$C$ ne sort pas en dernier $\iff Z \leqslant W$

> La probabilité que $C$ ne sorte pas en dernier est égale à $\frac{1}{2}$

2. (a) Le temps passé par $C$ dans le bureau de poste est égal au temps de sa communication, soit $Z$, plus le temps d'attente, soit $\min(X,Y)$.

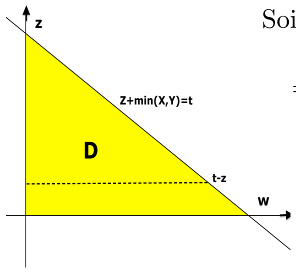
> $T = Z + \min(X,Y)$

   (b) $\forall t \in \mathbb{R}, [\min(X,Y) > t] = [X > t] \cap [Y > t]$, et comme $X$ et $Y$ sont indépendantes,
$P\left(\min(X,Y) > t\right) = P(X > t) \times P(Y > t)$, donc $P\left(\min(X,Y) \leqslant t\right) = (1 - F_X(t)) \times (1 - F_Y(t))$.
$X$ et $Y$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, donc si $t < 0$, alors $F_X(t) = F_Y(t) = 0$ d'où $P\left(\min(X,Y) \leqslant t\right) = 0$.
et si $t \geqslant 0$, alors $P\left(\min(X,Y) \leqslant t\right) = 1 - \left(\mathrm{e}^{-\alpha t}\right)^2$

> $P\left(\min(X,Y) \leqslant t\right) = 0$ si $t < 0$ et $P\left(\min(X,Y) \leqslant t\right) = 1 - \mathrm{e}^{-2\alpha t}$ si $t \geqslant 0$

Une densité $f_{XY}$ de $\min(X,Y)$ est alors définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f_{XY}(t) = 0$ si $t < 0$, et $f_{XY}(t) = 2\alpha\,\mathrm{e}^{-2\alpha t}$ si $t \geqslant 0$

$$\boxed{\min(X,Y) \hookrightarrow \mathscr{E}(2\,\alpha)}$$

(c) 


$T$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, donc pour $t < 0$, $[T \leqslant t] \subset [T < 0] = \varnothing$, donc $F_T(t) = 0$

Soit $t \geqslant 0$, $P(T \leqslant t) = \displaystyle\iint_D f_{XY}(t) \times f_Z(t) = \int_{z=0}^{t} \int_{\omega=0}^{t-z} 2\,\alpha\,\mathrm{e}^{-2\alpha\omega} \times \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha z} \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}z$

$$= \int_{z=0}^{t} \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha z} \left[-\mathrm{e}^{-2\alpha\omega}\right]_{\omega=0}^{t-z} \mathrm{d}z = \int_{z=0}^{t} \alpha\left(\mathrm{e}^{-\alpha z} - \mathrm{e}^{-2\alpha t + \alpha z}\right)\mathrm{d}z = \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\right)^2$$

$$\boxed{F_T(t) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\right)^2 \text{ si } t \geqslant 0 \text{ et } F_T(t) = 0 \text{ si } t < 0}$$

On vérifie que $F_T$ est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ; donc $T$ est une variable à densité.

On pouvait également utiliser le produit de convolution : $\forall t \in \mathbb{R},\ f_T(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x) \times f_Z(t-x)\,\mathrm{d}x$, or une densité de $T$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et d'autre part, lorsque $t \geqslant 0$, $f_Z(t-x)$ est nulle pour $x \geqslant t$ donc $f_T(t) = \displaystyle\int_0^t 2\,\alpha\,\mathrm{e}^{-2\alpha x} \times \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}x = 2\,\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\right)$

On constate heureusement que ces deux méthodes conduisent au même résultat pour la loi de $T$.

(d) $E(T) = E\Big(\min(X,Y)\Big) + E(Z) = \dfrac{1}{2\,\alpha} + \dfrac{1}{\alpha}$,

$$\boxed{E(T) = \frac{3}{2\,\alpha} \text{ c'est à dire, étant donné que } \alpha = \frac{1}{5}, \text{ l'espérance de } T \text{ est égale à 7 minutes et 30 secondes}}$$

3. (a) $\star$ Si $C$ ne sort pas en dernier, c'est que $Z \leqslant |X-Y|$, donc $\max(Z, |X-Y|) = |X-Y|$ ; dans ce cas $X_{(3)} = \max(X,Y) = X$ ou $Y$. Ainsi $X_{(3)} = \max(X,Y) = \min(X,Y) + |X-Y| = \min(X,Y) + \max(Z, |X-Y|)$

$\star$ Si $C$ sort en dernier, alors $Z \geqslant |X-Y|$, donc $\max(Z, |X-Y|) = Z$ ; donc $C$ sort au bout d'un temps égal à $X_{(3)} = \min(X,Y) + Z = \min(X,Y) + \max(Z, |X-Y|)$

(b) $\big[\max(Z, |X-Y|) \leqslant t\big] = [Z \leqslant t] \cap [\,|X-Y| \leqslant t]$ ; $X$, $Y$ et $Z$ sont mutuellement indépendantes, donc $Z$ et $|X-Y|$ sont indépendantes et $P\big(\max(Z, |X-Y|) \leqslant t\big) = P\big(Z \leqslant t\big) \times P\big(|X-Y| \leqslant t\big)$

$Z$ et $|X-Y|$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc $\forall t < 0$, $P\Big(\max(Z, |X-Y|) \leqslant t\Big) = 0$

$\forall t \geqslant 0$, $P\Big(\max(Z, |X-Y|) \leqslant t\Big) = F_Z(t) \times F_W(t) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\,t}\right)^2$

$$\boxed{P\Big(\max(Z, |X-Y|) \leqslant t\Big) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\,t}\right)^2 \text{ si } t \geqslant 0 \text{ et } P\Big(\max(Z, |X-Y|) \leqslant t\Big) = 0 \text{ si } t < 0}$$

(c) On constate en effet que $\max(Z, |X-Y|)$ et $T$ ont même fonction de répartition, donc suivent la même loi. Par conséquent, $E(X_{(3)}) = E\big(\min(X,Y)\big) + E\big(\max(Z, |X-Y|)\big) = E\big(\min(X,Y)\big) + E(T)$

$$\boxed{E(X_{(3)}) = \frac{1}{2\,\alpha} + \frac{3}{2\,\alpha} = \frac{2}{\alpha}}$$

Remarque : l'espérance de $X$ est égale à 5 minutes, donc $\alpha = \dfrac{1}{5}$, et l'espérance de $X_{(3)}$ est de 10 minutes.