MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°7
Durée : 3 heures 30

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

EXERCICE 1

Nous allons dans cet exercice examiner deux situations fondamentalement différentes concernant un couple de variables aléatoires (X,Y) où X et Y suivent la même Loi Uniforme sur l'intervalle ouvert $]0,1[$. Dans chacune des situations nous désignerons par F la fonction de répartition du couple (X,Y) définie, on le rappelle, par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, F(x,y) = P\Big([X \leq x] \cap [Y \leq y] \Big)$$

Première situation
Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** toutes deux distribuées selon la même Loi Uniforme $\mathcal{U}(]0,1[)$.

1. Déterminer la fonction de répartition F du couple (X,Y).

2. Déterminer une densité du couple (X,Y).

3. On se propose de déterminer la loi de la variable $Z = \frac{Y}{X}$.

(a) Montrer que Z est une variable aléatoire réelle presque sûrement définie à valeurs positives.

(b) Soit t un réel quelconque de l'intervalle $[0,1]$
Représenter graphiquement le domaine $D_t = \left\{(x,y) \in [0,1]^2 \Big/ \dfrac{y}{x} \leq t\right\}$.
En déduire $P(Z \leq t)$.

(c) Soit t un réel quelconque de l'intervalle $]1,+\infty[$
Représenter graphiquement le domaine $D_t = \left\{(x,y) \in [0,1]^2 \Big/ \dfrac{y}{x} \leq t\right\}$.
En déduire $P(Z \leq t)$.

(d) La variable aléatoire Z admet-elle une densité ? Si oui, proposer une densité g pour Z.

Seconde situation
Soit X une variable aléatoire de Loi Uniforme $\mathcal{U}(]0,1[)$.
On note alors Y **la variable aléatoire définie par** $\underline{Y = 1 - X}$.

1. Justifier que Y suit également une Loi uniforme sur $]0,1[$.

2. Déterminer la fonction F de répartition du couple (X,Y)
Indication : on pourra faire apparaître cinq régions du plan à l'aide des droites d'équations : $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1,\ x + y - 1 = 0$ *et préciser sur chacune d'elles la valeur de* $F(x,y)$.

3. Représenter les lignes de niveau $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ de la fonction F et les deux régions du plan d'équation $F(x,y) = 0$ et $F(x,y) = 1$.
4. Déterminer la loi et plus particulièrement une densité de la variable $Z = \dfrac{X}{Y}$.
5. Le couple (X,Y) est-il un couple de variables aléatoires à densité ?

EXERCICE 2

Un couple de variables aléatoires réelles (X,Y) admet comme densité l'application f définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} k\, e^{y-3x} & \text{si } 0 \le y \le x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où k est un nombre réel.

1. Déterminer le réel k.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer la probabilité suivante : $P(X+Y \le t)$ pour tout réel t.
5. En déduire une densité de la variable aléatoire $Z = X + Y$

PROBLEME

Rappels

1) *Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de densités respectives f et g alors la variable aléatoire $X+Y$ est une variable de densité $f * g$ définie par :*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t.$$

2) *Une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $a > 0$ admet pour densité la fonction f définie par*

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = ae^{-ax} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}.$$

Partie I - Somme de variables exponentielles indépendantes.

On considère une suite de variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ indépendantes définies sur un espace probabilisé, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre a ($a > 0$). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \Delta_1 + \cdots + \Delta_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Delta_k$.

1. Donner les valeurs de $E(T_n)$ et de $V(T_n)$.
2. Démontrer qu'une densité de la variable aléatoire T_2 est donnée par la fonction f_2 définie par :

$$\begin{cases} f_2(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f_2(x) = a^2 x e^{-ax} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}.$$

3. Justifier par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ l'existence d'une densité f_n pour la variable T_n et déterminer l'expression de f_n.

Partie II - File d'attente à un guichet : "premier arrivé, premier servi".

Nous considérerons un bureau de poste ne possédant qu'un seul guichet. Un client qui arrive dans ce bureau se retrouve nécessairement dans l'une des situations suivantes :
- Il se fait servir tout de suite si le guichet est libre
- Il prend place dans la file d'attente si le guichet est occupé, se fait servir dès que tous ses prédécesseurs dans la file ont été servis.

Une fois servi, il quitte aussitôt le bureau de poste.
On modélise cette situation en notant, pour tout entier naturel n non nul :
- T_n l'instant d'arrivée dans la poste du $n^{\text{ième}}$ client [1]
- U_n sa durée d'attente dans la file ($U_n = 0$ si le guichet est libre)
- S_n la durée de son service au guichet
- $W_n = U_n + S_n$ la durée de présence dans la poste.

Nous conviendrons que $T_0 = 0$ et poserons pour tout entier naturel n non nul : $\Delta_n = T_n - T_{n-1}$.
On a alors

$$T_0 = 0, \quad T_1 = \Delta_1, \quad \text{et } \forall n \geq 1, \ T_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k.$$

Nous ferons en outre les hypothèses suivantes :
i) les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots, S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ sont indépendantes.
ii) les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre a.
iii) les variables aléatoires $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre b.
iv) $b > a$

Nous noterons F_n et G_n les fonctions de répartition des variables aléatoires U_n et W_n et **admettrons** le résultat $_1$ suivant :

$$\mathcal{R}_1 : \qquad F_n \text{ et } G_n \text{ sont continues sur } [0, +\infty[\text{, de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.$$

1. Dans cette question (et uniquement dans celle-ci), nous supposerons que lorsque le premier client arrive, le guichet est libre. Autrement dit

$$U_1 \text{ est la variable certaine égale à } 0 \text{ et } W_1 = S_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(b).$$

On s'intéresse à la loi de U_2.

(a) Pour $u < 0$, que vaut $F_2(u)$?

(b) Donner la loi du couple (W_1, Δ_2).

(c) Justifier $[U_2 = 0] = [W_1 - \Delta_2 \leq 0]$

(d) En déduire $P(U_2 = 0) = \dfrac{b}{a+b}$ puis donner $F_2(0)$.

(e) Soit $u > 0$ fixé.
Justifier l'égalité

$$[U_2 \leq u] = [U_2 = 0] \cup [0 < W_1 - \Delta_2 \leq u] \,.$$

En déduire $F_2(u) = 1 - \dfrac{a}{a+b} e^{-bu}$.

1. Les clients sont numérotés selon leur ordre d'arrivée après le déclenchement du chronomètre

(f) La variable aléatoire U_2 admet-elle une densité de probabilité ?

2. Dans ce qui suit, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

(a) Justifier

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \begin{cases} U_n(\omega) &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{si } W_{n-1}(\omega) - \Delta_n(\omega) < 0 \\ U_n(\omega) &= W_{n-1}(\omega) - \Delta_n(\omega) \text{ sinon.} \end{cases}$$

(b) Justifier l'indépendance des variables aléatoires W_{n-1} et Δ_n.

(c) Que vaut $P(W_n \leq 0)$? En déduire à l'aide de $\mathcal{R}_1$ que W_n est une variable à densité.

(d) φ_{n-1} désignant une densité de W_{n-1}, établir que

$$P(W_{n-1} \leq \Delta_n) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t ae^{-at} \varphi_{n-1}(w) \mathrm{d}w \right) \mathrm{d}t.$$

(e) En déduire $P(U_n = 0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} ae^{-at} G_{n-1}(t) \mathrm{d}t$.

(f) Soit $u > 0$. Démontrer que

$$F_n(u) = \int_0^{+\infty} ae^{-at} G_{n-1}(u+t) \mathrm{d}t. \tag{1}$$

En raisonnant de la même façon, on montrerait et on **admettra** l'égalité :

$$G_n(u) = \int_0^u be^{-bt} F_n(u-t) \mathrm{d}t. \tag{2}$$

3. Dans cette question, on suppose que W_1 suit une loi exponentielle de paramètre $(b-a)$. À l'aide des formules (1) et (2), calculer F_2 puis G_2. En déduire que les fonctions F_n et G_n ne dépendent plus de n, c-à-d : $F_n = F_2$ et $G_n = G_2$ pour tout $n \geq 2$.