Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°3 - A remettre le vendredi 9 octobre 2015

« Informatique & Algèbre Linéaire »

Informatique - Notion de récursivité

Les fonctions récursives sont fondamentales en Informatique. En voici un exemple :

```
1 def fact(n):
2     if n==0:
3         return 1
4     else:
5         return n*fact(n-1)
```

Vous pouvez constater que dans le script de cette fonction `Fact`, l'instruction en ligne 5 fait appel à cette même fonction `Fact` : c'est en cela que l'algorithme présenté est dit récursif.

---

1. Nous vous proposons de construire en mode récursif le script d'une fonction notée `PUIS` dont les arguments d'entrée sont les entiers `a,b,n` qui retourne l'unique couple d'entiers `[A,B]` tel que $\left(a+b\sqrt{5}\right)^n = A+B\sqrt{5}$. Plus précisément, vous devrez simplement compléter le script suivant :

```
def PUIS(a,b,n):
    if n==0:
        Rep= .......
    else:
        [A,B]= .......
        Rep= .......
    return Rep
def SIGNE(x):
    if x>=0:
        sign=' + '
    else:
        sign=' - '
    return sign
#***************************************
n=100
x=1;y=1;
titi=PUIS(x,y,n)
A=titi[0];B=titi[1];
print('La puissance '+str(n)+' de ',str(x)+SIGNE(y)+str(abs(y))+' x RACINE('+str(5)+') vaut : ')
print(str(A)+SIGNE(B)+str(abs(B))+' x RACINE('+str(5)+')')
```

et vérifier qu'il retourne

```
La puissance 100 de  1 + 1 x RACINE(5) vaut :
5020345377785334247106892406968712174356200696053 76 + 2245166707050973996485931500070732353712963977216 00 x RACINE(5)
```

2. Compléter le script suivant de sorte que soit affiché après exécution de l'instruction $n°9$, le terme de rang n de la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = 2\,U_{n+1} + 4\,U_n$ où $U_0 = U_1 = 1$

```
1 def FIBO(n):
2     b,c= .......
3     for k in range(n):
4         b,c= .......
5     return  .......
6 #***************************************
7 n=100
8 print("Le terme d'indice "+str(n)+" de la suite (Un) vaut :")
9 print(FIBO(n))
```

et vérifier qu'il retourne

```
Le terme d'indice 100 de la suite (Un) vaut :
502034537778533424710689240696871217435620069605376
```

3. Vous avez du remarquer que l'entier précédent figure dans les deux résultats obtenus. Est-ce une coïncidence ? Justifier votre réponse !

Algèbre Linéaire

EXERCICE

E est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ; a est un réel strictement positif donné. À toute fonction de E, on associe la fonction $T_a(f)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T_a(f)(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)\ \mathrm{d}t$$

1. Soit s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ s(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right)$. Déterminer $T_a(s)$.

2. Soit f une fonction quelconque de E.

(a) Montrer que $T_a(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $T_a(f)$ est constante si et seulement si f est périodique de période $2a$.

3. Montrer que l'application T_a est un endomorphisme de E.
Est-il injectif ? Est-il surjectif ?

PROBLEME

1. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xf'(x) = 3f(x).$$

(a) Démontrer que $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(b) Résolution sur l'intervalle $]0,+\infty[$: déterminer l'ensemble S_+ des solutions, sur $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle précédente.

(c) Résolution sur l'intervalle $]-\infty,0[$: déterminer l'ensemble S_- des solutions, sur $]-\infty,0[$ de l'équation différentielle précédente.

(d) En déduire les solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

(e) On pose $f_+ : x \mapsto \begin{cases} x^3 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ et $f_- : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
Représenter f_+ et f_-.
Justifier que la famille (f_+, f_-) est une base de l'espace vectoriel S.

2. $E = \mathbb{R}_3[\mathbb{X}]$. On considère Φ l'application définie sur $\mathbb{R}_3[\mathbb{X}]$ de la façon suivante :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[\mathbb{X}],\ \Phi(P) = XP' - 3P.$$

(a) Démontrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[\mathbb{X}]$.

(b) Démontrer que $\ker\Phi = \mathrm{Vect}(X^3)$.

(c) Démontrer que $\mathrm{Im}\,\Phi = \mathbb{R}_2[\mathbb{X}]$.

(d) Justifier que l'équation différentielle $xy' - 3y = 2x^2 + x - 1$ admet une unique solution polynomiale de degré inférieur ou égal à deux. *On répondra à cette question sans résoudre l'équation différentielle mais en utilisant les informations sur* $\mathrm{Im}\,\Phi$ *et* $\ker\Phi$.

(e) On note $Q = 2X^2 + X - 1$ et P l'unique polynôme de $\mathbb{R}_2[\mathbb{X}]$ tel que $\Phi(P) = Q$. Déterminer P.

3. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : « $xy' - 3y = 2x^2 + x - 1$ ».
Constituent-elles un espace vectoriel ?