Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°8 - A remettre le lundi 9 décembre 2013

« Une histoire de machine à sous »

S et N désignent deux entiers vérifiant $S \geq 2$ et $N \geq 1$.
Un appareil à sous contient une somme de S euros et fonctionne de la manière suivante :
– on introduit 1 € dans l'appareil ;
– l'appareil rend 3 €, 2 € ou 0 € avec des probabilités respectives a, b, c non nulles et telles que

$$a + b + c = 1$$

– l'appareil cesse de fonctionner s'il ne contient plus que 1 € ou 0 € .
Un joueur possède une somme de N €.

Partie A

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
Le joueur décide de faire n parties avec l'appareil. On désigne par $X_1, X_2, \dots, X_n$ les sommes aléatoires que possède le joueur à l'issue de la première, deuxième,. . . , n-ième partie.

1. (a) Déterminer la loi de probabilité de X_1 , ainsi que son espérance mathématique $E(X_1)$.

(b) On suppose $N \geq 2$ et $S \geq 4$. Déterminer la loi de probabilité de X_2 et son espérance mathématique. Vérifier que :

$$E(X_2) - N = 2\,(E(X_1) - N)$$

(c) À quelles conditions portant sur N et S, le joueur est-il assuré d'effectuer au moins n parties ?

(d) On suppose ces conditions réalisées.
En considérant le gain algébrique de chaque partie, montrer que la variable aléatoire $X_n - N$ s'exprime comme une somme de n variables aléatoires suivant toutes la même loi.
En déduire $E(X_n)$ en fonction de n, N, a, b, c.

Partie B

Le joueur décide de prolonger le jeu jusqu'à ce qu'il soit ruiné ou jusqu'à ce qu'il ait fait « sauter I'appareil », c'est–à–dire que celui-ci ne contienne plus que 1 € ou 0 €.
k et n étant deux entiers naturels, on désigne par $p_n(k)$ la probabilité que le joueur, possédant k euros à un moment donne du jeu, effectue alors n parties et soit ruiné à l'issue de ces n parties.
On a ainsi $p_0(0) = 1$ et $p_0(k) = 0$ si $1 \leq k \leq N + S$.
On pose enfin

$$p(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(k)$$

1. Préciser $p(0)$, $p(N + S)$ et $p(N + S - 1)$.

2. On suppose que l'on a $1 \leq k \leq N + S - 2$.

(a) Montrer, en utilisant la formule des probabilités totales, que pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1}(k) = ap_n(k + 2) + bp_n(k + 1) + cp_n(k - 1)$$

En déduire $p(k)$ en fonction de $p(k + 2)$, $p(k + 1)$ et $p(k - 1)$.

(b) On considère la matrice colonne $V(k) = \begin{pmatrix} p(k-1) \\ p(k) \\ p(k+1) \end{pmatrix}$

Déterminer une matrice M carrée d'ordre 3 telle que : $V(k + 1) = MV(k)$.

3. On suppose à présent : $a = b = {}^{1}/_{5}$, $N = 2$, $S = 4$.

(a) Vérifier que l'on a dans ce cas :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Calculer M^4.

(c) En utilisant la question 2b exprimer $V(5)$ en fonction de M^4 et de $V(1)$.

(d) En déduire que $p(1)$ et $p(2)$ sont solutions d'un système que l'on déterminera.

(e) Calculer $p(2)$, on l'exprimera sous forme d'une fraction irréductible.