Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°12 - A remettre le mardi 17 janvier 2012

« Réduction - Calcul par Blocs - Intégrale à noyaux »

EXERCICE

Soit A la matrice carrée d'ordre 4 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On pose
$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe α_n tel que : $B^{2n+1} = \alpha_n\ B$.
   (b) En déduire les valeurs de B^r pour toutes les valeurs de r entier naturel.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel r, il existe trois réels $a_r,\ b_r,\ c_r$ tels que :
$$A^r = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & B^r & & 0 \\ & & & 0 \\ a_r & b_r & c_r & 1 \end{array}\right)$$
   (b) En déduire l'expression de A^r en fonction de r.
   (On pourra distinguer les résultats selon la parité de r).

PROBLÈME

E désigne le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des applications réelles continues sur $[0, 1]$.
On appelle T l'application qui à un élément f de E associe la fonction $T(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0,1]\,,\ T(f)(x) = \int_0^1 (x-t)f(t)dt$$

1. Justifier que E n'est pas de dimension finie.
2. Vérifier que T est un endomorphisme de E.
3. On note e_1 et e_2 les vecteurs de E définis par
$$e_1 : x \longmapsto 1 \qquad \text{et} \qquad e_2 : x \longmapsto x$$
   Vérifier que $\mathrm{Im}(T)$ est inclus dans l'ensemble des applications affines sur $[0, 1]$, puis justifier que $\mathrm{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de dimension deux dont une base est donnée par $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.
4. On note E_1 le sous-espace vectoriel de E égal à l'image de T, c'est-à-dire :
$$E_1 = \mathrm{Im}(T) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$$
   On définit T_1 par la restriction de T au sous-espace vectoriel E_1.

(a) Justifier que T_1 est un endomorphisme de E_1 et vérifier que sa matrice A dans la base $\mathcal{B}$ de E_1 est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/3 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(b) Démontrer que T_1 n'a pas de valeur propre.

5. **Recherche des valeurs propres de T**

   (a) On note $g : x \longmapsto \cos(2\pi x)$. Calculer $T(g)$. En déduire que 0 est valeur propre de T.

   (b) Pour λ réel non nul, montrer que $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda Id_E) \subset \mathrm{Im}(T)$.

   (c) En déduire que $\mathrm{Sp}(T) = \{0\}$.

6. **Résolution de l'équation :** $\displaystyle\int_0^1 (x-t)f(t)dt - f(x) = g(x)$

   Soit g une fonction de E fixée quelconque. On note (1) l'équation suivante d'inconnue f dans E :

$$T(f) - f = g \tag{1}$$

   (a) Unicité

      i. Justifier sans calcul (à l'aide de la question précédente) que $T - Id_E$ est injectif.

      ii. En déduire que, si une solution de (1) existe, elle est unique.

   (b) Existence

      i. Justifier que $T_1 - Id_{E_1}$ est bijectif et donner son application réciproque (on pourra calculer $(A - I_2)^{-1}$).

      ii. On pose $h = (T_1 - Id_{E_1})^{-1}(T(g)) - g$. Vérifier que cette définition a un sens puis que h est solution de l'équation (1).

   (c) Un exemple
   Donner l'unique solution de (1) lorsque la fonction g est donnée par $g : x \longmapsto x^2$.

7. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n : x \longmapsto \cos(2n\pi x)$.

   (a) Que vaut $T(g_n)$?

   (b) Démontrer que la famille $(g_1, \cdots, g_n)$ est libre dans E.

   (c) En déduire que le noyau de T n'est pas de dimension finie.