Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°7 - A remettre le mardi 15 novembre 2011
« Séries numériques & fonctions – Probabilités »

EXERCICE N°1

Dans tout cet exercice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle positive décroissante de limite nulle.
On pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = n\,(a_{n-1} - a_n)$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\big) - n\,a_n$.
2. On suppose dans cette question que la série de terme général a_n converge.
   (a) Pour chaque entier n, nous désignerons par $R_n(a)$ le reste d'ordre n de cette série.
   - Préciser la limite de la suite $\big(R_{2n}(a) - R_n(a)\big)$.
   - Prouver alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,a_n = 0$.

   (b) En déduire que la série de terme général b_n converge et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.
3. On suppose dans cette question que la série de terme général b_n converge.
   (a) Pour chaque entier n, nous désignerons par $R_n(b)$ le reste d'ordre n de cette série.
   - Montrer que pour tout n et k dans $\mathbb{N}^*$, $n\,(a_n - a_{n+k}) \leqslant \displaystyle\sum_{j=n+1}^{n+k} b_j$
   - Comparer $n\,a_n$ et $R_n(b)$ puis prouver que $\lim\limits_{n\to\infty} n\,a_n = 0$.

   (b) En déduire que la série de terme général a_n converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

EXERCICE N°2

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$.

1. Soit n un entier quelconque.
   Prouver que la fonction $x \longmapsto |f_n''(x)|$ admet un maximum sur le segment $[a, b]$ en indiquant soigneusement le ou les théorèmes utilisés.
2. On pose alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \max\limits_{x\in[a,b]} |f_n''(x)|$.
   Nous supposerons que la série $\sum \alpha_n$ est convergente et que la série $\sum f_n(x)$ est convergente pour tout $x \in [a, b]$.
   Nous poserons alors : $\forall x \in [a, b],\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
   (a) Soient x et h deux réels tels que $x \in [a, b]$ et $x + h \in [a, b]$.
   - Justifier l'existence d'une suite (c_n) telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x+h) - f_n(x) = h\,f_n'(x) + \frac{h^2}{2} \times f_n''(c_n) \text{ où } c_n \in [a, b]$$
   - Montrer que la série $\sum f_n'(x)$ est convergente.
   - Établir alors l'égalité : $\left|S(x+h) - S(x) - h\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)\right| \leqslant \dfrac{h^2}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$

   (b) En déduire que S est dérivable sur $[a, b]$ et que : $\forall x \in [a, b],\ S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$.
3. **Application**
   Soient (d_n) une suite réelle et un réel $\rho > 0$ tel que la suite $(|d_n|\,\rho^n)$ est bornée.
   Montrer que la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} d_n\,x^n$ est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\rho, \rho[$.

EXERCICE N°3

Une urne contient n boules noires et n boules blanches. On prélève une à une les boules de cette urne.
Soit ω l'univers des résultats et X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la dernière blanche.

- Déterminer $X(\Omega)$, lunivers image de la variable X.
- Calculer la probabilité de l'événement $[X < k]$ pour $k \in X(\Omega)$.
- Calculer l'espérance de X.